U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Primer Semestre 2006

PREGUNTA 1

a) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie descrita por la ecuación $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos $x + y - z = 3$ y $2x - y + z = 4$

Solución Normales a los planos dados:

$$N_1 = (1, 1, -1)\,,\ N_2 = (2, -1, 1)$$

____0.2

$$N = N_1 x N_2 = \begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \mathrm{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1)$$

____0.3

N es vector normal a la superficie en el punto requerido. Tomamos $(0, 1, 1)$ que es paralelo a N. Sea $F(x, y, z) = z - x^2 - xy = 0$.

$\nabla F(x, y, z) = (-2x - y, -x, 1) = \alpha(0, 1, 1)$
$\Longrightarrow\ \alpha = 1, x = -1, -2x - y = 0$
$\Longrightarrow\ y = 2$
por lo cual el punto requerido, es decir, el punto de tangencia es $\mathrm{P}_0 = (-1, 2, -1)$.______$\mathrm{P}_0 = 0.5$
La ecuación del plano tangente a la superficie en este punto y que es perpendicular a los planos es
$(x + 1, y - 2, z + 1) \cdot (0, 1, 1) = 0$
________________________________1.0
$\Longrightarrow\ y + z - 1 = 0$

PREGUNTA 2:

a) Sea $z = xf\,(x + y) + yg\,(x - y)$ con f y g funcione al menos 2 veces diferenciables.

Calcule $W = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} - 2\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$

b) Probar que la relación $x^3 + 2y^3 + x - 3xyz - 2y + 3 = 0$ define implícitamente la función $z = f(x, y)$ en una vecindad de $(1, 1)$. Calcule además $\frac{\delta z}{\delta x}\,(1, 1)$

Solución

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x + y) + xf'(x + y) + yg'(x - y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'(x + y) + xf''(x + y) + yg''(x - y)$________________0.3
$\frac{\partial z}{\partial y} = xf'(x + y) + g(x - y) - yg'(x - y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xf''(x + y) - 2g'(x - y) + yg''(x - y)$________________0.3
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x + y) + xf''(x + y) + g'(x - y) - yg''(x - y)$
$-2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'(x + y) - 2xf''(x + y) - 2g'(x - y) + 2yg''(x - y)$________________0.3

$W = 0 + 0 - 4g'(x - y) + 4yg''(x - y)$
$\Longrightarrow\ W(x, y) = 4(yg''(x - y) - g'(x - y))$________________0.1

b) Si $x = 1, y = 1 \implies z = \frac{5}{3}$

Sea $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + x - 3xyz - 2y + 3 = 0$
tenemos que:

i) $F(1, 1, \frac{5}{3}) = 0$__________________0.3

ii) $F_x(x, y, z) = 3x^2 + 1 - 3yz$

$F_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2$
$F_z(x, y, z) = -3xy$

Son funciones continuas en cualquier vecindad de $(1{,}1{,}\frac{5}{3})$__________________0.3
Como $F_z(1{,}1{,}\frac{5}{3}) = -3 \neq 0$
Dadas todas estas condiciones el teorema de la función implícita asegura que existe $V = V_\delta(1, 1)$ y una función f definida sobre v tal que__________________0.2
$z = f(x, y)$ para todo $(x, y) \in V$ y $z \in (\frac{5}{3} - r, \frac{5}{3} + r)$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$ y $\frac{5}{3} = f(1, 1)$
Solución
$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -\frac{F_x(1,1,\frac{5}{3})}{F_z(1,1,\frac{5}{3})} = -\frac{1}{3}$__________________0.2

PREGUNTA 3

a) Se desea Construir un estanque en forma de un paraboloide del tipo $z = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$ con una capacidad de $2\pi V_0\ m^3$. Determine las dimensiones de r y h de modo que se gaste la menor cantidad posible de material.

Indicaciones: El volumen de un objeto de esta forma es $V = \frac{\pi}{2} r^2 h^2$ y el área $A = \frac{\pi}{6} r^4 \left[\left(1 + \frac{4h}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$

Solución

a) $V = \frac{\pi}{2} r^2 h^2 = 2\pi V_0 \implies 4V_0 = r^2 h^2 \implies \frac{4}{r^2} = \frac{h^2}{V_0}$

$A = \frac{\pi}{6} r^4 \left[\left(1 + \frac{h^3}{V_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$

Definimos:
$F(r, h, \lambda) = \frac{\pi}{6} r^4 \left[\left(1 + \frac{h^3}{V_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - \lambda \left(\frac{\pi}{2} r^2 h^2 - 2\pi V_0\right)$
$F_r(r, h, \lambda) = \frac{2}{3}\pi r^3 \left[\left(1 + \frac{h^3}{V_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - \pi\lambda r h^2 = 0 \qquad (1)$
$F_h(r, h, \lambda) = \frac{3}{4}\pi r^4 (1 + \frac{h^3}{V_0})^{\frac{1}{2}} \frac{h^2}{V_0} - \pi\lambda r^2 h = 0 \qquad (2)$
$F_\lambda(r, h, \lambda) = \frac{\pi}{2} r^2 h^2 - 2\pi V_0 = 0$

Multiplicando (1) por r y (2) por h y sustituyendo

$\frac{2}{3}\pi r^4 \left[\left(1 + \frac{h^3}{V_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - \frac{3}{4}\pi r^4 \frac{h^3}{V_0} (1 + \frac{h^3}{V_0})^{\frac{1}{2}} = 0$
Como $r \neq 0$, dividiendo por πr^4 y multiplicando por 12, se tiene
$8 \left[\left(1 + \frac{h^3}{V_0}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - 9\frac{h^3}{V_0} (1 + \frac{h^3}{V_0})^{\frac{1}{2}} = 0$
$(1 + \frac{h^3}{V_0})^{\frac{1}{2}} \left[8 \left(1 + \frac{h^3}{V_0}\right) - 9\frac{h^3}{V_0} \right] - 8 = 0$

sea $K = \frac{h^3}{V_0}$ se tiene la ecuación
$(1 + k)^{\frac{1}{2}} [8 - k] - 8 = 0 \implies (1 + k)(8 - K)^2 = 64$

Desarrollando y factorizando se obtiene

$K\left[K^2 - 15K + 48\right] = 0 \implies K^2 - 15K + 48 = 0$

resolviendo
$K = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{2}$
$\implies K1 \simeq 10.37$
$\implies K2 \simeq 4.62$
Si $K1 = \frac{15-\sqrt{33}}{2} \implies h = (\frac{15-\sqrt{33}}{2} V_0)^{\frac{1}{3}}$

y $r^2 = \frac{4V_0}{h^2} \implies r = \frac{2\sqrt{V_0}}{(\frac{15-\sqrt{33}}{2} V_0)^{\frac{1}{3}}}$
Si $K2 = \frac{15+\sqrt{33}}{2} \implies h = (\frac{15+\sqrt{33}}{2} V_0)^{\frac{1}{3}}$

y $r = \frac{2\sqrt{V_0}}{(\frac{15+\sqrt{33}}{2} V_0)^{\frac{1}{3}}}$
Evaluando se establece que los valores que minimiza la cantidad de material son

$$h = (\frac{15+\sqrt{33}}{2} V_0)^{\frac{1}{3}},$$
$$r = \frac{2\sqrt{V_0}}{(\frac{15-\sqrt{33}}{2} V_0)^{\frac{1}{3}}}$$