U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRUEBA ESCRITA DE SUFICIENCIA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2006

Problema 1

Considere la curva C definida por la curva $c(t) = (a\sin(t)\cos(t), a\sin^2(t), a\cos(t))$ con $a > 0$ y $0 \le t \le \pi$

a) Pruebe que el cambio $t = \frac{s}{2}$ permite la reparametrización $\bar{c}(s) = (b\sin(s), b(1-\cos(s)), 2b\cos(\frac{s}{2}))$

b)Pruebe que la proyección de la curva C en el plano XY es una circunferencia, determine su ecuación cartesiana y sus elementos principales.

c)Determine la curvatura de C en cualquier punto usando la reparametrización dada en a).

Solución

a) Sea $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, \pi]$ tal que $t = \varphi(s) = \frac{s}{2}$

$\varphi'(s) = \frac{1}{2} > 0$, por lo cual φ es estrictamente creciente y continua, es decir, φ es biyectiva. Además.

$\bar{c}(s) = (c \circ \varphi)(s) = c(\varphi(s)) = c(t)$

$= (a\sin(t)\cos(t), a\sin^2(t), a\cos(t)$

$= (\frac{a}{2}\sin(2t), \frac{a}{2}(1-\cos(2t)), a\cos(t))$

$= (\frac{a}{2}\sin(s), \frac{a}{2}(1-\cos(s)), a\cos(\frac{s}{2}))$

tomado $\frac{a}{2} = b$ se tiene

$\bar{c}(s) = (b\sin(s), b(1-\cos(s)), 2b\cos(\frac{s}{2}))$

por lo tanto $\bar{c}$ es una reparametrización de c

b) La proyección de C en XY es

$r(s) = (b\sin(s), b(1-\cos(s)), 0)$

como $K(s) = \dfrac{\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}}{\|(x'(s), y'(s))\|^3} = \dfrac{\begin{vmatrix} a\cos(2s) & a\sin(2s) \\ -2a\sin(2s) & 2a\cos(2s) \end{vmatrix}}{\left[(a^2\sin^2(2s) + a^2\cos^2(2s))^{\frac{1}{2}}\right]^3} = \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a}$

$K(s) = \frac{2}{a}$en XY implica que esta proyección es una circunferencia de radio $R = \frac{a}{2}$

Además $x = a\sin t\cos t$

$y = a\sin^2 t$

$x^2 + y^2 = a^2\sin^2 t\cos^2 t + a^2\sin^4 t = a^2\sin^2 t = ay$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = ay \Leftrightarrow x^2 + (y^2 - ay + \frac{a^2}{4}) = a^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

ecuación cartesiana: $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

c) Con $\bar{c}(s) = (b\sin(s), b(1-\cos(s)), 2b\cos(\frac{s}{2}))$ se tiene

$\bar{c}'(s) \times \bar{c}''(s) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b\cos s & b\sin s & -b\sin\frac{s}{2} \\ -b\sin s & b\cos s & -\frac{b}{2}\cos\frac{s}{2} \end{vmatrix}$

$= b^2(-\frac{1}{2}\sin s\cos\frac{s}{2} + \cos s\sin\frac{s}{2}, -\frac{1}{2}\cos s\cos\frac{s}{2} - \sin s\sin\frac{s}{2}, 1)$

$\Longrightarrow \|\bar{c}'(s) \times \bar{c}''(s\| = b\sqrt{1 + \sin^2\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{s}{2}}$

$\|c'(s)\| = \sqrt{b^2\cos^2 s + b^2\sin^2 s + b^2\sin^2\frac{s}{2}} = b\sqrt{1 + \sin^2\frac{s}{2}}$

$K(s) = \frac{\|\bar{c}'(s) \times \bar{c}''(s\|}{\|\bar{c}'(s)\|^3} = \frac{(13 - 3\cos s)^{\frac{1}{2}}}{b^3(3-\cos s)^{\frac{3}{2}}}$

Problema 2

a) Sea la función definida por $z = z(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$

Calcular el valor de $W = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

b) Calcularr los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 - y^3 - x^2 + y + 1$. y determinar naturaleza de cada uno de ellos

Solución

a) Sea $u = x + y$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$

para las derivadas se tiene
$\frac{\partial z}{\partial x} = f(u) + yg'(u) + xf'(u)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u) + f'(u) + yg''(u) + xf''(u) = 2f'(u) + yg''(u) + xf''(u)$
$\frac{\partial z}{\partial y} = xf'(u) + g(u) + yg'(u)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xf''(u) + g'(u) + g'(u) + yg''(u) = xf''(u) + 2g'(u) + yg''(u)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(u) + xf''(u) + g'(u) + yg''(u)$

Reemplazando $W = 0$

b) $f(x,y) = x^4 - y^3 - x^2 + y + 1$

$f_x(x,y) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0$
$f_y(x,y) = -3y^2 + 1 = 0$
puntos críticos: $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$
$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2$
$f_{yy}(x,y) = -6y$
$f_{xy}(x,y) = 0$

$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = -12y(6x^2 - 1)$
$H\ (0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -12\frac{1}{\sqrt{3}}(-1) = \frac{12}{\sqrt{3}} > 0$
$f_{xx}(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -2 < 0$
$\therefore$ en $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ hay máximo local.
$H(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{24}{\sqrt{3}} < 0$
$\therefore$ para $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ hay punto silla.
$H(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{12}{\sqrt{3}} < 0$
$\therefore$ para $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ hay punto silla
$H(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{24}{\sqrt{3}}$
$\therefore$para .$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ hay punto silla
$H(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{24}{\sqrt{3}} > 0$ y $f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = 4 > 0$
$\therefore$ en $f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ hay un mínimo local
$H(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{24}{\sqrt{3}} > 0$ y $f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = 4 > 0$
$\therefore$ en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ hay un mínimo local.

Problema 3
Determine el valor de $I = \int\limits_{c} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}dx + \sqrt{1+x^2}dy$ en los siguientes casos:

i) Trazo rectilíneo que une $A(0,1)$ con $B(1,2)$

ii) C es $x^2 + y^2 = a^2$

Solución

i) $P(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$Q(x,y) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, por lo que I es independiente de la trayectoria. Calculemos $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función potencial
$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow \phi(x,y) = \int \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}dx + h(y) = \frac{1}{2}y\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}du + h(y) = y\sqrt{1+x^2} + h(y)$
$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} + h'(y) = \sqrt{1+x^2}$
$\Longrightarrow h'(y) = 0 \qquad y \qquad \therefore h(y) = c$
Así $\phi(x,y) = y\sqrt{1+x^2}$
Entonces $I = \phi(1,2) - \phi(0,1) = 2\sqrt{2} - 1$

ii) Como I es independiente de trayectoria y C es curva cerrada, entonces, $I = 0$

Problema 4
Usando el Teorema de Gauss calcular para $F(x,y,z) = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ la integral $I = \iint\limits_S F \cdot Nds$ y $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$.

Solución
$\nabla \cdot F = 2x + 2y + 2z$
$I = 2\iiint\limits_R (x+y+z)dxdydz$
con coordenadas cilíndricas
$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z, \qquad |J| = r$
$I = 2\iiint\limits_D (r\cos\theta + r\sin\theta + z)rdrd\theta dz$
$D : 0 \le r \le 2 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad r \le z \le 2$
$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 (r^2\cos\theta + r^2\sin\theta + zr)dzdrd\theta$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 (zr)dzdrd\theta$
$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 rz^2|_r^2 drd\theta$
$= 2\pi\int_0^2 r(4-r^2)dr = 2\pi\int_0^2 (4r - r^3)dr$
$= 2\pi(4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4})|_0^2 = 2\pi(8-4) = 8\pi$