U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PES CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2008

Preguntas

1) En el punto $P_0 = (1, 0, 1)$ de la curva $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, sent, \cosh t)$, $t \geq 0$, determinar. $a)$ vectores T, N, B ;

$b)$ escalares K, τ;

$c)$ ecuación del plano osculador.

Respuesta

Con $t_0 = 0$, $\overrightarrow{r}(0) = (1, 0, 1) = P_0$; $\overrightarrow{r}'(t) = (-sent, \cos t, senht)$

$\overrightarrow{r}''(t) = (-\cos t, -sent, \cos ht)$; $\overrightarrow{r}'''(t) = (-sent, \cos t, senht)$;
$\overrightarrow{r}'(0) = (0, 1, 0)$; $\overrightarrow{r}''(0) = (-1, 0, 1)$; $\overrightarrow{r}'''(0) = (0, -1, 0)$;

con esto resultan:
a) T(0)=(0,1,0); B(0)=$\frac{\overrightarrow{r}'(0)\times\overrightarrow{r}''(0)}{\left\|\overrightarrow{r}'(0)\times\overrightarrow{r}''(0)\right\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$;
N(0)=B(0)×T(0)=$\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$
b)$K(0) = \frac{\left\|\overrightarrow{r}'(0)\times\overrightarrow{r}''(0)\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'(0)\right\|^3} = \sqrt{2}$; $\tau(0) = \frac{\overrightarrow{r}'(0)\times\overrightarrow{r}''(0)\cdot\overrightarrow{r}'''(0)}{\left\|\overrightarrow{r}'(0)\times\overrightarrow{r}''(0)\right\|} = 0$

c) $(\overrightarrow{R} - (1, 0, 1)) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Longleftrightarrow x + z = 2, \qquad \overrightarrow{R} = (x, y, z)$

2) De entre todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, obtener el valor máximo de $f(x, y, z) = x + y + z$. Del resultado deducir la desigualdad

$$(x + y + z)^2 \leq 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Respuesta

Con $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$se tiene

$Lx = 1 + 2\lambda x = 0$
$Ly = 1 + 2\lambda y = 0$
$Lz = 1 + 2\lambda z = 0$
$L\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

$\Longrightarrow 2\lambda = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} \Longrightarrow x = y = z; 3x^2 = a^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}, y = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}, z = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$
Así, puntos $P = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ son puntos críticos de

f que cumplen la condicion dada; de entre estas $P_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$
determina $f(P_1) = \frac{3}{\sqrt{3}}a = \sqrt{3}a$
valor máximo de f lo cual se puede ratificar numéricamente y teóricamente (se puede establecer determinante $H(P_1)$ a partir de $f_x = 1 + z_x$; $f_y = 1 + z_y; z_x = -\frac{x}{z}; z_y = -\frac{y}{z}$;etc.). Con el resultado se tiene
$f(x, y, z) = x + y + z \leq f(P_1) = \sqrt{3}a$ (por ser $f(P_1)$ valor máximo)

y de esto $(x + y + z)^2 \leq 3a^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

3) Con el teorema de Green deducir la formula

$$A\,(D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

que permite calcular el área de D, si C es curva regular cerrada que limita la región $D \subset \mathbb{R}^2$.Usar la fórmula para calcular el área de D si es limitada por las curvas $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$ con $y \geq 0$.

Respuesta
Con $f(x, y) = -y$, $g(x, y) = x$ en $I = \oint_C xdy - ydx$ y teorema de Green para $\overrightarrow{F} = (-y, x) \in C^1$ y C curva cerrada
$I = \int\int_D (1 - (-1))dydx = 2A(D)$
Así $\frac{I}{2} = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \cdot 2A(D) = A(D)$
En el ejemplo $C = C_1 \cup C_2$ con $C_1 : \overrightarrow{r}(t) = (t, t^2), t \in [-1, 1]$
con $\overrightarrow{r}'(t) = (1, 2t); C_2 : \overrightarrow{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}sent), t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
$\overrightarrow{r}'(t) = (-\sqrt{2}sent, \sqrt{2}\cos t)$ y aplicando la fórmula establecida
$A(D) = \frac{1}{2}\int_{C_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{C_2} xdy - ydx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t(2t) - t^2)dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\left(\sqrt{2}\cos t\right)\left(\sqrt{2}\cos t\right) - \left(\sqrt{2}sent\right)\left(-\sqrt{2}sent\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2(\cos^2 t + sen^2 t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} + \frac{1}{2} \cdot 2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$$

4) Calcule

$$I = \int_C \frac{yzdx + xzdy + xydz}{1 + x^2y^2z^2}$$

Si C es: *a*) la curva que une A=$(0, 0, 0)$ con B=$(1, 1, 1)$.
b) curva dada por $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, asent, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Respuesta:
Considerando el campo vectorial

$\overrightarrow{F} = \left(\frac{yz}{1+x^2y^2z^2}, \frac{xz}{1+x^2y^2z^2}, \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}\right)$ que es de clase $C^{(1)}$
en $\mathbb{R}^3$ y verifica $\frac{\partial f}{\partial y} = z \cdot \frac{1+x^2y^2z^2-2y^2x^2z^2}{(1+x^2y^2z^2)^2} = \frac{z(1-x^2y^2z^2)}{(1+x^2y^2z^2)^2}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = z \cdot \frac{1+x^2y^2z^2-2y^2x^2z^2}{(1+x^2y^2z^2)^2} = \frac{z(1-x^2y^2z^2)}{(1+x^2y^2z^2)^2}$$

o sea $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$; de modo similar $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$; $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$

equivalente a $\nabla \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$; con esto $\overrightarrow{F}$ es campo gradiente con potencial $\phi(x,y,z) = \arctan xyz$ y las integrales son independientes de C.
Se obtienen por lo tanto los resultados:
a) $I = arctan1 - arctan0 = \frac{\pi}{4}$
b) $I = 0$, por lo precedente y ser C curva cerrada (intersección del cilindro vertical con plano horizontal)
5) Resuelva

$$I = \int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS \qquad \text{si} \quad \overrightarrow{F} = (xz^2, x^2y, y^2z)$$

y S es la superficie que totalmente limita el sólido $R \subset \mathbb{R}^3$ definido como

$$R = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$$

Respuesta:

Con los datos se tiene que $\overrightarrow{F} \in C^{(1)}, S = \overset{5}{\underset{i=1}{\cup}} S_i$ que determina S superficie

que encierra al sólido y es aplicable el teorema de Gauss con lo cual

$$\begin{aligned}
\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS &= \int\int\int_R \nabla \cdot \overrightarrow{F} dV \\
&= \int\int\int_R \nabla \cdot (xz^2, x^2y, y^2z) dxdydz \\
&= \int\int\int_R (z^2+x^2+y^2) dxdydz \\
&= \int\int_D \left(\int_0^{x^2+y^2} (z^2+x^2+y^2) dz \right) dxdy \quad \text{con } D: x \geq 0; y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1
\end{aligned}$$

Con coordenadas cilíndricas se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS &= \int\int_{D'} \left(\int_0^{r^2} r(r^2+z^2)dz \right) drd\phi \ \text{ con } D' : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq 1 \\
&= \int\int_{D'} \left(r^3 z + r\frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_0^{r^2} drd\phi \\
&= \int\int_{D'} \left(r^5 + \frac{r^7}{3} \right) drd\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(r^5 + \frac{r^7}{3} \right) dr \right) d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^6}{6} + \frac{r^8}{24} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = \frac{5\pi}{48}
\end{aligned}
$$