U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2007

Problema 1

Pruebe que si s es cualquier número no entero, entonces

$$\cos(sx) = \frac{2s\sin(\pi s)}{\pi}\left(\frac{1}{2s^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{s^2-n^2}\right)$$

Solución

Consideramos $f(x) = \cos(sx)$ es una función par periódica de período 2π por lo que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(sx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(sx)\,dx = \frac{1}{\pi s}\sin(sx)\,|_0^\pi = \frac{\sin(s\pi)}{\pi s}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(sx)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos(s+n)x + \cos(s-n)x\right]dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(s+n)x}{s+n} + \frac{\sin(s-n)x}{s-n}\right]|_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(s+n)\pi}{s+n} + \frac{\sin(s-n)\pi}{s-n}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(s-n)\sin(s+n)\pi + (s+n)\sin(s-n)\pi}{s^2-n^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2s\cos(n\pi)\sin(s\pi)}{s^2-n^2}\right] = \frac{2s}{\pi}\frac{(-1)^n\sin(s\pi)}{s^2-n^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\cos(sx) &= \frac{\sin(s\pi)}{s\pi} + \frac{2s}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(s\pi)\cos(nx)}{s^2-n^2} \\
&= \frac{\sin(s\pi)}{s\pi} + \frac{2s\sin(s\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{s^2-n^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \cos(sx) = \frac{2s\sin(\pi s)}{\pi}\left(\frac{1}{2s^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{s^2-n^2}\right)$$

Problema 2

Se define una hélice cilindrica, como aquella curva cuyas rectas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$($\overrightarrow{u}$ eje de la hélice).

a) Pruebe que en una curva si $\frac{K}{\tau}$ es una constante, entonces la curva es una hélice, donde K es su curvatura y τ su torsión

- Indicación: Puede hacer uso de algunas de las formulas de Frenet para la demostración.

a) Para la curva parametrizada por

$$r\left(t\right)=\left(a\cos\frac{t}{a\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}},a\sin\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)$$

- Demostrar que el parámetro t es el parámetro longitudinal de arco. Calcule la curvatura y la torsión y muestre que es una hélice.

Solución

a) Sea $r=r\left(s\right)$ una parametrización de la curva C. s parámetro longitudinal de arco tal que $\frac{K}{\tau}=c$

Por formulas de Frenet:

$$\frac{d\widehat{T}}{ds}=k\widehat{N}\quad,\quad\frac{d\widehat{B}}{ds}=-\tau\widehat{N}\quad\Longrightarrow\widehat{N}=\frac{1}{K}\frac{d\widehat{T}}{ds}\quad y\quad\widehat{N}=-\frac{1}{\tau}\frac{d\widehat{B}}{ds}$$

De donde

$$\frac{1}{K}\frac{d\widehat{T}}{ds}+\frac{1}{\tau}\frac{d\widehat{B}}{ds}=0$$

Entonces

$$\frac{d\widehat{T}}{ds}+\frac{k}{\tau}\frac{d\widehat{B}}{ds}=0$$

$$\Longrightarrow\frac{d\widehat{T}}{ds}+c\frac{d\widehat{B}}{ds}=0$$

Haciendo antiderivada

$$\widehat{T}\left(s\right)+c\widehat{B}\left(s\right)=\overrightarrow{u}\qquad,\overrightarrow{u}\ \text{ vector constante}$$

Normalizando

$$\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}=\widehat{u}=\frac{\widehat{T}+c\widehat{B}}{\sqrt{1+c^2}}$$

Multiplicando por $\widehat{T}$ se tiene

$$\widehat{u}\cdot\widehat{T}=\frac{\left(\widehat{T}+c\widehat{B}\right)\cdot\widehat{T}}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\text{constante}$$

Esto significa de acuerdo a la definición, que esta es una hélice con $\overrightarrow{u}$ como su eje.

b)

$$\begin{aligned}
r\left(t\right)&=\left(a\cos\frac{t}{a\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}},a\sin\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)\\
r'\left(t\right)&=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{a\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)\\
||r'\left(t\right)||&=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1
\end{aligned}$$

Además es claro que $r(t)$ es de clase C^1 con $||r'(t)|| \neq 0$, por lo tanto $r(t)$ es regular y como $||r'(t)|| = 1$, t es parámetro longitud de arco.

Además

$$\begin{aligned}
r''(t) &= \left(-\frac{1}{2a}\cos\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right), 0, -\frac{1}{2a}\sin\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)\right) \\
r'''(t) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}a^2}\sin\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right), 0, -\frac{1}{2\sqrt{2}a^2}\cos\left(\frac{t}{a\sqrt{2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$k(t) = ||r''(t)|| = \frac{1}{2a}$$

$$\tau(t) = \frac{r' \cdot r'' \times r'''}{||r''(t)||^2} = \frac{-\frac{1}{8a^3}}{\frac{1}{4a^2}} = -\frac{1}{2a}$$

$$\frac{K}{\tau} = -1 = cte$$

Luego $r(t)$ es una hélice.

Problema 3

Hallar las ecuaciónes de los planos tangentes a la esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r , que sean paralelas al plano

$$ax + by + cz = 0$$

Solución

A partir de la ecuación de la esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r se tiene:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$$

Determinemos los vectores normales a la esfera

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \nabla F(x, y, z) \\ \overrightarrow{N} &= (2(x - x_0), 2(y - y_0), 2(z - z_0)) \\ \overrightarrow{N_1} &= ((x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)) \end{aligned}$$

En el punto de tangencia el vector normal a la esfera debe ser paralelo al vector normal del plano

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{N}_2 = (a, b, c) \\ \overrightarrow{N}_1 &= \alpha \overrightarrow{N}_2 \\ [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] &= \alpha (a, b, c) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \alpha a \\ y - y_0 &= \alpha b \\ z - z_0 &= \alpha c \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación de la esfera

$$\begin{aligned} \alpha^2 \left(a^2 + b^2 + c^2\right) &= r^2 \\ \alpha &= \pm \frac{r}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \end{aligned}$$

Luego en los punto de tangencia se debe satisfacer.

$$\begin{aligned} x &= x_0 \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ y &= y_0 \pm \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ z &= z_0 \pm \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

La ecuación del plano es

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1) \cdot \overrightarrow{N} = 0$$

$$\left[(x, y, z) - \left(x_0 \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y_0 \pm \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z_0 \pm \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)\right] \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\Longleftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \pm \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} r = 0$$

$$\therefore \quad ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \pm r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

es la ecuación del plano buscado

Problema 4

a) Sea S un sólido de $\mathbb{R}^3$ acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y los planos $y=x$, $y=z$, $x=0$, $z=0$.
Expresar

$$I=\int\int_S\int \frac{z\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

en coordenadas esfericas.

b) Calcular

$$\int_c 2x\cos(y)dx-x^2\sin\left(y\right)dy$$

donde C es la curva desde $(1,0)$ a $(e,1)$

Solución:

a)

$$x=\rho\cos\theta\sin\phi,\ \ y=\rho\sin\theta\sin\phi,\ \ z=\rho\cos\phi$$

$$\text{Si}\quad y=z\quad\text{entonces}\quad \rho\sin\theta\sin\phi=\rho\cos\phi$$

$$\Longleftrightarrow \tan\phi=\frac{1}{\sin\theta}\Longleftrightarrow \phi=\arctan\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$S=\left\{(\rho,\theta,\phi):\ 0\le\rho\le 2,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \arctan\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\le\phi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

Por lo tanto

$$I=\int_0^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\arctan\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\sin^3\phi\cos\phi d\phi d\theta d\rho$$

b) Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\cos y\right)=-2x\sin y=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2\sin y\right)$$

se tiene que

$$F\left(x,y\right)=\left(2x\cos y,-x^2\sin y\right)$$

es un campo gradiente, por lo tanto hay independencia de trayectoria.

Calculamos el potencial

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= 2x\cos y\quad\Longrightarrow\quad \phi\left(x,y\right)=\int 2x\cos y dx+k\left(y\right)\\ \phi\left(x,y\right) &= x^2\cos y+k\left(y\right)\end{aligned}$$

Derivando $\phi\left(x,y\right)$ respecto de y y comparandocon

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -x^2 \sin y$$

tenemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -x^2 \sin y + K'(y) = -x^2 \sin y$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad K'(y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad K(y) = c \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y + c$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_c 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy &= \phi(e, 1) - \phi(1, 0) \\ &= e^2 \cos(1) - 1 \end{aligned}$$