U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRUEBA DE SUFICIENCIA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2006

PREGUNTA 1

Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π definida por $f(x) = x^2;\ -\pi \leq x \leq \pi$.
A partir del resultado obtenido, deducir la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ayuda:
$\int x^2 \sin(bx)dx = -(\frac{x^2b^2-2}{b^3})\cos(bx) + \frac{2x}{b^2}\sin(bx);\ \int x^2\cos(bx)dx = \frac{2x}{b^2}\cos(bx) + (\frac{x^2b^2-2}{b^3})\sin(bx)$

Solución

f es una función par, obtenemos entonces una serie de Fourier de cosenos.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

La serie es

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

como la función es continua en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \text{ para todo } x \text{ real}$$

Ahora, con $x = \pi$ y $f(\pi) = \pi^2$ se tiene

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}.......)$$

de donde se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}) = \frac{\pi^2}{6}$$

PROBLEMA 2

Una piedra es arrojada formando un ángulo θ con la horizontal y con velocidad v_0. Su trayectoria está dada por $r(t) = (v_0 t\cos\theta, v_0 t\sin\theta - (16t)^2)$

En $t = 0$ la piedra está en $(0,0)$ y considere que el eje X es la horizontal.

a) Encuentre el punto donde llega la piedra

b) Verifique que la curva en coordenadas cartesianas es $y = x\tan\theta - (\frac{16}{v_0})^2\sec^2(\theta)x^2$

c) Calcular $K(t)$ y el valor de t donde se maximiza.

Solución

a)Para $y = 0$ se tiene $v_0 t \sin\theta - (16t)^2 = 0$

resolviendo para $t : t = \frac{v_0}{16^2}\sin\theta$

sustituyendo en x: $x(t) = v_0\frac{v_0}{16^2}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{16^2}\sin\theta\cos\theta$

El punto donde llega la piedra es $(\frac{v_0^2}{16^2}\sin\theta\cos\theta, 0)$

b) $x = v_0 t\cos\theta$

$y = v_0 t\sin\theta - (16t)^2$

$\implies x\tan\theta - (\frac{16}{v_0})^2\sec^2(\theta)x^2 = v_0 t\cos\theta\tan\theta - (\frac{16}{v_0})^2\sec^2(\theta)v_0^2 t^2\cos^2\theta$

$= v_0 t\sin\theta - (\frac{16}{v_0})^2\frac{1}{\cos^2\theta}v_0^2 t^2\cos^2\theta$

$= v_0 t\sin\theta - (16t)^2$

$\therefore x\tan\theta - (\frac{16}{v_0})^2\sec^2(\theta)x^2 = v_0 t\sin\theta - (16t)^2 = y$

c)$K(t)\frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3}$

$\|r'(t)\| = \sqrt{v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - 2\cdot 16^2 t)^2}$

$= \sqrt{v_0^2 - 4\cdot 16^2 t v_0\sin\theta + 4\cdot 16^4 t^2}$

$\therefore K(t) = \frac{32 v_0\cos\theta}{(\sqrt{v_0^2-4\cdot 16^2 t v_0\sin\theta+4\cdot 16^4 t^2})^3}$

su valor máximo se obtiene cuando $t = 0$ y es

$K(t) = \frac{32\cos\theta}{v_0^2}$

PROBLEMA 3

Determine el máximo valor de la expresión $x^2 + xy$, si (x, y) son puntos de la región cerrada, dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; $a > 0$, $b > 0$

Sugerencia: Parametrice la frontera de la región por $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ para estudiar el comportamiento de $x^2 + xy$ allí.

Solución

$f(x, y) = x^2 + xy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x \implies (0, 0)$ es único punto crítico.

$f(0, 0)$ no es máximo ni mínimo puesto que, para cualquier $\varepsilon > 0$ $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2$ y $f(\varepsilon, -2\varepsilon) = -\varepsilon^2$

El máximo no está en el interior de la región.

Sea

$x = a\cos\theta$; $y = b\sin\theta$ y

$\phi(\theta) = f(a\cos\theta, b\sin\theta) = a^2\cos^2\theta + ab\sin\theta\cos\theta$

$\phi'(\theta) = -2a^2\cos\theta\sin\theta + ab\cos^2\theta - ab\sin^2\theta$

$\phi'(\theta) = -a^2\sin 2\theta + ab\cos 2\theta = 0 \implies \tan 2\theta = \frac{b}{a}$

si $\tan 2\theta = \frac{b}{a} \implies \sin 2\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos 2\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

volviendo al valor de la función en términos de θ se tiene:

$$\phi(\theta) = a^2\cos^2\theta + ab\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta) + \tfrac{1}{2}ab\sin 2\theta$$

$f_{\max} = a^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) + \frac{1}{2}ab\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2}\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore f_{\max} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

PROBLEMA 4

Utilice el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar la integral de Superficie $\iint_S F \cdot \hat{n} dS$ para el campo vectorial $F(x, y, z) = xz\hat{\imath} + 2yz\hat{\jmath} + 3xy\hat{k}$ y S la superficie frontera de la región descrita por $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3$

Solución

$F(x, y, z) = xz\hat{\imath} + 2yz\hat{\jmath} + 3xy\hat{k} \implies divF = z + 2z$

$\iint_S F \cdot \hat{n} dS = \iiint_R divF dV = \iiint_R (3z) dxdydz$

usando coordenadas cilíndricas

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

la región es descrita por

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq z \leq 3$

$$\iiint_R (3z) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 3zr dz d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{27}{2} r d\theta dr = \int_0^2 \frac{27}{2} r\theta|_0^{2\pi} = \int_0^2 27\pi r dr = 27\pi \frac{r^2}{2}|_0^2 = 54\pi$$

Por lo tanto, utilizando el teorema se tiene que

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dS = 54\pi$$