UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. DE MATEMATICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACION
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN

CALCULO AVANZADO
PAUTA P.E.S
15 de Julio de 2004

Pregunta 1:

1.- Sea una partícula en movimiento cuyo vector posición en cualquier instante t está dado por

$$\vec{r}(t) = (\,3Cos(f(t)), 3Sen(f(t)), 1)$$

a) Calcule $f(t)$ si la rapidez con que se desplaza la partícula es 2, además defina la correspondiente parametrización por longitud de arco para $\vec{r}$ con el $f(t)$ obtenido aquí.

b) Calcule el vector tangente unitario a esta curva en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{4}$.

c) Pruebe que la curvatura de la curva descrita por $\vec{r}(t)$ es constante. Indique su radio de curvatura.

Solución:

a) $\vec{r}(t) = (\,3Cos(f(t)), 3Sen(f(t)), 1)$ Entonces:

$$rapidez = \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(3\cdot f\,'(t))^2} = 2$$

$$\therefore |3f\,'(t)| = 2 \Rightarrow f\,'(t) = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow f(t) = \pm\frac{2}{3}t + c$$

Defino $f(t) = \frac{2}{3}t$ y resulta $\vec{r}(t) = \left(3\cos\left(\frac{2}{3}t\right), 3sen\left(\frac{2}{3}t\right), 1\right)$ entonces

$$s = \int_0^t \|r\,'(u)\|du = \int_0^t \left\|-2sen\left(\frac{2}{3}u\right), 2\cos\left(\frac{2}{3}u\right), 0\right\| = \int_0^t 2du = 2t \Rightarrow \quad \therefore \quad s = 2t$$

$$\therefore \vec{r}(s) = \left(3\cos\left(\frac{1}{3}s\right), 3sen\left(\frac{1}{3}s\right), 1\right)$$

es la parametrización por longitud de arca

b) Vector tangente unitario

$$T(s) = \vec{r}(s) = \left(-sen\left(\frac{1}{3}s\right), \cos\left(\frac{1}{3}s\right), 0 \right)$$

Si $t = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow s = \dfrac{\pi}{2}$ y

$$\therefore \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-sen\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), 0 \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

c) Curvatura

$$K(s) = \left\| \vec{r}\,''(s) \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}s\right), -\frac{1}{3}sen\left(\frac{1}{3}s\right), 0 \right) \right\| = \frac{1}{3} \quad \text{todo } s$$

y R = 3 radio de curvatura

Pregunta 2:

Calcule la derivada direccional de $\phi(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2$ en P_0=(0, $\sqrt{3}/2, 3/2$) en la dirección de la normal exterior en P_0 a la superficie cerrada conformada por $x^2 + y^2 = 2\,z^2$ para $0 \le z \le 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ para $1 \le z \le \sqrt{3}$.

Solución: Para la función ϕ se tiene

$$\nabla\phi(x,y,z) = (2x + 2z, 2y, 2x) \Rightarrow \nabla\phi(P_0) = (3, \sqrt{3}, 0)$$

P_0 pertenece a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Sea $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

$$\nabla G = (2x, 2y, 2x) \;\Rightarrow\; \nabla G(P_0) = (0, \sqrt{3}, 0 \;) \Rightarrow \vec{u} = \frac{(0,\sqrt{3},0)}{2\sqrt{3}}$$

$$D_{\vec{u}}\phi(P_0) = \nabla\phi(P_0)\cdot\vec{u} = (3,\sqrt{3},0)\cdot\left(\frac{(0,\sqrt{3},0)}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto

$$D_{\vec{u}}\phi(P_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pregunta 3:

Utilice la sustitución $u = \dfrac{y}{x}$, $v = y + x^2$ para evaluar la integral

$$\iint_{R_{xy}} \frac{y + 2x^2}{x^2 + xy}\,dxdy$$

En donde R_{xy} es la región en el primer cuadrante acotada por las curvas $y = 3 - x^2$, $y = 8 - x^2$, $y = 0$, e $y = 2x$

Nota.- puede usar el hacho que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v}{\partial(x,y)}}$ en un dominio en el que ambas derivadas son distintas de cero

Solución:

$$u = \frac{y}{x} \qquad \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{y} \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y+2x^2}{x^2}$$
$$v = y + x^2$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{y+2x^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{x^2}{y+2x^2}$$

$$\iint_{R_{xy}} \frac{y+2x^2}{x^2+xy}\,dxdy = \iint_{R_{uv}} \frac{y+2x^2}{x^2+xy} \cdot \left| \frac{x^2}{y+2x^2} \right| dudv = \iint_{R_{uv}} \frac{1}{1+\dfrac{y}{x}}\,dudv = \iint_{R_{uv}} \frac{1}{1+u}\,dudv$$

La región R_{uv} determinada por la transformación será

$$y = 0 \Rightarrow u = 0; \qquad y + x^3 = 3 \Rightarrow v = 3$$

$$y + x^2 = 8 \Rightarrow v = 8; \qquad \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow u = 2$$

Luego R_{uv} es el rectángulo determinado por las rectas : $u = 0,\ u = 2,\ v = 3 \quad y \quad v = 8$

Entonces

$$\iint_{R_{xy}} \frac{y+2x^2}{x^2+xy}\,dxdy = \int_0^2 \int_3^8 \frac{1}{1+u}\,dudv = \int_0^2 \frac{5}{1+u}\,du = \left[5\ln(1+u)\right]_0^2 = 5\ln 3$$

$$\therefore \quad \iint_{R_{xy}} \frac{y+2x^2}{x^2+xy}\,dxdy = 5\ln 3$$