Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Dpto. de Matemática y Computación

Cálculo Avanzado P.E.S

Pregunta 1.

Determinar puntos críticos y clasificarlos si $f(x,y)=x^4-y^3-x^2+y+1$.
Calcular valores extremos si los hay

Solución:

Se tiene $f_x = 4x^3 - 2x$, $f_y = -3y^2 + 1 \Rightarrow$

sistema para puntos críticos:

$$\begin{array}{l} 4x^3 - 2x = 0 \\ -3y^2 + 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}; \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \end{array} \Rightarrow$$

puntos críticos:

$$P_0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), P_1 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Con $f_{xx} = 12x^2 - 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -6y$, $H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} H(P_0) > 0, f_{xx}(P_0) < 0; f(P_0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1, \textit{ valor máx.} \\ H(P_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{punto silla} \\ H(P_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{punto silla} \\ H(P_3) > 0, f_{xx}(P_3) > 0; f(P_3) = \textit{mín.} \\ H(P_4) < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{punto silla} \\ H(P_5) > 0, f_{xx}(P_5) > 0; f(P_5) = \textit{mín.} \end{array}$$

Pregunta 2.

Determinar vector tangente a la curva definida por

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

en $P_0 = (2,1,-2)$

Solución:

Con $y = y(x)$, $z = z(x)$ definida por sistema que determina la curva, esta se parametriza como $\vec{r}(t) = (t, y(t), z(t))$ osea, con $x = t$ y su vector tangente es $\vec{r}\,'(t) = (1, y'(t), z'(t))$

Derivando el sistema:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 y'(X) + 3z^2 z'(x) &= 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -3x^2 & 3z^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3x^2 + 3z^2}{3y^2 - 3z^2}; \quad z'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3y^2 & -3x^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3y^2 - 3z^2} = \frac{-3y^2 + 3x^2}{3y^2 - 3z^2}$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{0}{1-4} = 0; \; z'(2) = \frac{4-1}{1-4} = -1 \Rightarrow \vec{r}\,'(1) = (1,0,-1)$$

Pregunta 3.

Evaluar

$$\iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

si Ω es el dominio ubicado en el primer cuadrante exterior a $x^2 + y^2 - y = 0$, e interior a $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Solución:

Con coordenadas polares $\mathrm{I} = \iint_{D'} \frac{r^2 \sin\varphi \cos\varphi}{r^2} e^{-r^2} r \quad dr\, d\varphi$

con $D': 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \sin\varphi \le r \le 2\sin\varphi$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} \sin\varphi \cos\varphi \, e^{-r^2} r dr\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right)_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-\sin^2\varphi} - e^{-4\sin^2\varphi}\right)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$= \left[-\frac{1}{4} e^{-\sin^2\varphi} + \frac{1}{16} e^{-4\sin^2\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{16}e^{-4} - \frac{1}{16}$$

Pregunta 4.

Demuestre que la integral de línea

$$\int_C (ysenzdx + xsenzdy + xy\cos zdz)$$

es independiente de la trayectoria C , donde C es curva regular que une los puntos (0,0,0) y (1,1,1). Evaluarla.

Solución:

Con $P = y\sin z,\ \ Q = x\sin z,\ \ R = xy\cos z \quad \in C^1$, se cumple

$$\frac{\partial R}{\partial y} = x\cos z = \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial R}{\partial x} = y\cos z = \frac{\partial P}{\partial z};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin z = \frac{\partial P}{\partial y},$$

$\in c^1 \Rightarrow$ la integral es independiente de C. El potencial obtenido del sistema

$\phi_x = y\sin z, \quad \phi_y = x\sin z, \quad \phi_z = xy\cos z \Rightarrow$

$\phi(x,y,z) = xy\sin z$. El valor de la integral es $\mathrm{I} = \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = \sin 1$

Pregunta 5 .

Resolver $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}dS$ si $\overrightarrow{F} = (x+y, z^2, x+z)$ y S es la frontera de la región $\Re$ tal que

$\Re : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \qquad z \ge 0$.

Solución:

Con teorema de divergencia, $\nabla\cdot\vec{F} = \nabla\cdot(x+y, z^2, x+z) = 2$,
$\iint_S \overline{F}\cdot\hat{n}\, d\, S = \iiint_R 2dv = 2\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$