U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2007

Problema 1

Un solido D es el interior de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ entre los planos $z = 0$ y $z = 1$

Evalue:

$$\int\int_D\int (1 + \sqrt{x^2 + y^2})dxdydz$$

Solución:

Se trata de una porción de la hoja superior del cono cuyo eje es el eje z, bajo el plano $z = 1$

Lo recomendable es usar coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

....0,2

La región viene descrita por:

$$0 \leq r \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad , \quad r \leq z \leq 1$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

$$f(x, y, z) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \implies f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 1 + r$$

....0,2

Calculando la integral

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad , \quad r \leq z \leq 1 \\ I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 (1 + r)rdzdrd\theta \end{aligned}$$

....1,4

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r)r(1 - r)drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3)drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4})|_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

....0,2

Problema 2

Un campo vectorial F se define por $F(x,y) = (x+y^3)\hat{\imath} + (-4x^3+y)\hat{\jmath}$ y su dominio limitado por la curva $4x^2+y^2=4$

a) Verifique el cumplimiento de las condiciones de hipotesis del teorema de Green

b) Compruebe que la formula presentada por el teorema en este caso se cumple

Solución:

a) $M(x,y) = x+y^3 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$

$N(x,y) = -4x^3+y \implies \frac{\partial N}{\partial x} = -12x^2$

$M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ Son funciones polinómicas por lo tanto son continuas en $\mathbb{R}^2$

La curva $4x^2+y^2=4$ ó $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ es una elipse, por lo que es una curva suave simple cerrada.
Por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema de Green

....0,4

b) Parametrizamos la elipse

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1 \text{ por}$$
$$c(t) = (\cos t, 2\sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

....0,2

La integral de linea queda:

$$\begin{aligned}
\oint_c (x+y^3)dx + (-4x^3+y)dy &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\cos t + 8\sin^3 t\right)(-\sin t) + \left(-4\cos^3 t + 2\sin t\right) 2\cos t\right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t\cos t - 8\sin^4 t - 8\cos^4 t + 4\sin t\cos t\right) dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sin t\cos t dt - 8\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt - 8\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt \\
&= 3\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\left[1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t + 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right] dt \\
&= 0 - 6\int_0^{2\pi} dt = -12\pi
\end{aligned}$$

....0,5

Por otro lado

$$\int_D\int (\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})dxdy = \int_D\int (-12x^2-3y^2)dxdy = -3\int_D\int (4x^2+y^2)dxdy$$

....0,2

Transformando a polares

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \qquad 0\leq r\leq 1 \\ y &= 2r\sin\theta \qquad 0\leq\theta\leq 2\pi \end{aligned}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2$$

....0,3

$$\therefore \int_D\int (\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})dxdy = -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 8r^3 dr d\theta = -6\int_0^{2\pi} d\theta = -12\pi$$

....0,4

Problema 3

a) Evaluar la integral de superficie $\int\int_s F \cdot dS$ para el campo vectorial $F(x,y,z) = (xy, yz, zx)$, donde S es parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, orientada en sentido positivo, situada sobre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$

b) Use el teorema de Stokes para evaluar $\int\limits_S \int (\nabla \times F) \cdot dS$ para el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (xze^y, -xze^y, z)$$

Donde S es la parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante orientado en sentido positivo.

Solución:

a) S puede ser parametrizada por

$$r(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2) con\, (x,y) \in D = [0,1] \times [0,1]$$

....0,2

luego, si

$$T_x = (1, 0, -2x) \quad \text{y} \quad T_y = (0, 1, -2y) \implies T_x \times T_y = (2x, 2y, 1).$$

Además

$$F(r(x,y)) = (xy, y(4 - x^2 - y^2), x((4 - x^2 - y^2)))$$

y

$$F \cdot T_x \times T_y = 4x + 8y^2 + 2x^2y - x^3 - xy^2 - 2y^4 - 2x^2y^2$$

....0,2

Dado que hemos parametrizado S en el sentido positivo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int\int_S F \cdot dS &= \int\int_D F \cdot T_x \times T_y dA \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (4x + 8y^2 + 2x^2y - x^3 - xy^2 - 2y^4 - 2x^2y^2) dx dy = \frac{713}{180} \end{aligned}$$

....0,6

b)

$$\int\limits_S \int (\nabla \times F) \cdot dS = \oint\limits_c xze^y dx + (-xze^y) dy + z dz$$

$C = C_1 + C_2 + C_3$ Donde

$$\begin{array}{ll} C_1 & \text{recta de } (1,0,0) \text{ a } (0,1,0) \\ C_2 & \text{recta de } (0,1,0) \text{ a } (0,0,1) \\ C_3 & \text{recta de } (0,0,1) \text{ a } (1,0,0) \end{array}$$

C es orientada positiva

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

....0,2

$c_1(t) = (1-t, t, 0) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{C_1} = \int_{C_1} xze^y dx - xze^y dy + zdz = \int_0^1 0dt = 0$$

....0,2

$c_2(t) = (0, 1-t, t) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{C_2} = \int_{C_2} xze^y dx - xze^y dy + zdz = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

....0,2

$c_3(t) = (t, 0, 1-t) \qquad 0 \leq t \leq 1\cdot$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} &= \int_{C_3} xze^y dx - xze^y dy + zdz = \int_0^1 \left[t\left(1-t\right) - \left(1-t\right)\right] dt \\ &= \int_0^1 -\left(t-1\right)^2 dt = -\frac{\left(t-1\right)^3}{3}|_0^1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

....0,2

$$\therefore \oint_C xze^y dx - xze^y dy + zdz = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ Por el teorema de Stokes

$$\int_S \int (\nabla \times F) \cdot dS = \frac{1}{6}$$

....0,2