U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2006

PREGUNTA 1

Calcule el volumen de la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=13$ y el cono $x^2+y^2=(z-1)^2$ para $z \geq 1$.

Solución Para la intersección de estas superficies hacemos el sistema entre las ecuaciones y obtenemos

$$(z-1)^2+z^2=13 \implies z^2-z-6=(z-3)(z+2)=0$$

la intersección que nos interesa está en el plano $z=3$ y su proyección en el plano XY es $x^2+y^2=4$

por lo tanto:

$V=\iiint\limits_R dv=\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{13-(x^2+y^2)}} dzdydx$

Considerando coordenadas cilíndricas,

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$z=z$

la región es descrita por

$0\leq r\leq 2$

$0\leq\theta\leq 2\pi$

$1+r\leq z\leq\sqrt{13-r^2}$

Entonces:

$V=\int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{1+r}^{\sqrt{13-r^2}} rdzd\theta dr=\int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\left[r\sqrt{13-r^2}-r(1+r)\right]d\theta dr$

$=2\pi\int\limits_0^2\sqrt{13-r^2}rdr-2\pi\int\limits_0^2(r+r^2)dr$

$=-\frac{2\pi}{3}(13-r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^2-2\pi(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3})|_0^2=-\frac{2\pi}{3}(9^{\frac{3}{2}}-13^{\frac{3}{2}})-2\pi(2+\frac{8}{3})$

$=\frac{2}{3}\pi 13\sqrt{13}-\frac{54}{3}\pi-4\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi(13\sqrt{13}-41)$

Por lo tanto $V=\frac{2}{3}\pi(13\sqrt{13}-41)$

PREGUNTA 2:
Sea C la curva intersección del plano $z = ax + by$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Se pide

a) Parametrizar la curva C

b) Encuentre todos los valores reales a y b tales que

$a^2 + b^2 = 1$ y $\int_C F(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0$
donde $F(x, y, z) = (y, z - x, -y)$ y C la curva descrita en el enunciado de este problema.

c) ¿Se puede concluir de (b) que F es un campo conservativo?. Justifique su respuesta.

Solución

a) C es intersección de $x^2 + y^2 = 1$ y $z = ax + by$. La primera ecuación indica que lo adecuado es parametrizar usando coordenadas polares:

$x = \cos t$; $y = \sin t$ y $z = a\cos t + b\sin t$, por lo que:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, a\cos t + b\sin t)$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\int_C F(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t, -a\sin t + b\cos t)$
$F(r(t)) = (\sin t, (a - 1)\cos t + b\sin t, -\sin t)$
$F(r(t) \cdot r'(t) = -\sin^2 t + (a - 1)\cos^2 t + b\sin t\cos t + a\sin^2 t - b\sin t\cos t$
$= a - 1$
sustituyendo

$$\int_C F(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (a - 1)dt = 2\pi(a - 1)$$

por lo tanto

$$\int_C F(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0 \iff a = 1$$

como $a^2 + b^2 = 1$ y $a = 1 \implies b = 0$
Luego todos los valores reales a y b tal que $a^2 + b^2 = 1$ son $a = 1$ y $b = 0$

c) F no es campo conservativo ya que

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z - x & -y \end{vmatrix} = (-1 - 1)\hat{\imath} + 0j + (-1 - 1)k$$

$rot\ F = -2\hat{\imath} - 2j$ es distinto de $(0, 0, 0)$
para que F sea conservativo se require que
$\int_C F(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0$
para toda curva cerrada.

PREGUNTA 3

Sea C la curva de intersección generada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la porción del plano $x + y + z = 1$. Si R representa la región del plano acotada por la curva C, verifique que se satisface el teorema de Stokes al considerar el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)$.

Solución Dado que la frontera de R es precisamente la curva C cuya parametrización viene dada por la función $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$c(t) = (\cos(t), \sin(t), 1 - \cos(t) - \sin(t)),$$

podemos evaluar directamente $\int_C F \cdot ds$ como sigue:

$$\int_C F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t)\, dt$$

Donde
$F(c(t)) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), 2 + 2\cos(t)\sin(t) - 2\cos(t) - 2\sin(t))$ y
$c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), \sin(t) - \cos(t))$,
reemplazando estos valores en (1) resulta

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= 2\int_0^{2\pi} [\sin(t) - \cos(t) + \cos(t)\sin^2(t) - \cos^2(t)\sin(t) \ + \cos 2t]dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, obtenemos$\int \int_R \nabla \times F \cdot dS$
Una parametrización para R, es la función $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), 1 - vcos(u) - v\sin(u)).$$

De esta manera

$$\int \int_R \nabla \times F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \nabla \times F(\Phi(u, v)) \cdot T_u \times T_v\, du\, dv, \tag{1}$$

donde

$\nabla \times F = (0, 0, y)$, $\nabla \times F(\Phi(u, v)) = (0, 0, v\sin(u))$
por tanto sólo nos interesa la última coordenada de $T_u \times T_v$ que es $-r$. Luego

$$\int \int_R \nabla \times F \cdot dS = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} v^2 \sin(u)\, du\, dv = 0.$$

Así, podemos concluir que se satisface el teorema de Stokes.