UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

PAUTA TERCERA PEP
CALCULO AVANZADO

9 de Diciembre de 2004

Pregunta 1

Utilice integral triple para calcular el volumen del esferoide

$$b^2(x^2+y^2)+a^2z^2 = a^2b^2$$

(no usar formulas)

Solución:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Usando coordenadas esféricas
$$x=\rho\cos\theta sen\phi$$
$$y=\rho sen\theta sen\phi$$
$$z=\rho\cos\phi$$

Se tiene $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 sen^2\phi + a^2\cos^2\phi}}$

Así

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{b^2sen^2\phi+a^2\cos^2\phi}}}\rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}sen\phi\Bigg|_0^{\frac{ab}{\sqrt{b^2sen^2\phi+a^2\cos^2\phi}}} d\theta\, d\phi$$

$$=\frac{2\pi}{3}(ab)^3\int_0^{\pi}\frac{sen\phi\, d\phi}{\left(b^2+(a^2-b^2)\cos^2\phi\right)^{3/2}}$$

$$u=\cos\phi \Rightarrow du=-sen\phi\, d\phi$$

$$=\frac{2\pi}{3}(ab)^3\int_{-1}^{1}\frac{du}{\left(b^2+(a^2-b^2)u^2\phi\right)^{3/2}}=\frac{2\pi}{3}(ab)^3\cdot\frac{u}{b^2\sqrt{(a^2-b^2)u^2+b^2}}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2\pi}{3}(ab)^3\cdot\frac{2}{b^2a}=\frac{4\pi}{3}a^2b$$

$$\therefore V=\frac{4\pi}{3}a^2b$$

Pregunta 2

Evalúe

$$\int_C y^2 dx + xydy$$

si C es la curva que une los puntos $P = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ y $Q = (-(1+\sqrt{2}), -(1+\sqrt{2}))$ a lo largo de la cardioide $\rho = a(1-\cos\theta)$ sin pasar por el origen.

Solución:

$$tg\theta_p = -\sqrt{3}, \quad \theta_p \in IIC \quad \Rightarrow \quad \theta_p = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$tg\theta_q = 1, \quad \theta_q \in IIIC \quad \Rightarrow \quad \theta_q = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

P y Q están en la cardioide $\Rightarrow$ $a = 2$

Sean C_1, segmentos $\overline{OP}$ y C_2 el segmento $\overline{OQ}$ y C el arco de cardioide de P a Q no por el origen.
Utilizando la formula de Green: sea $C^* = C + C_1 + C_2$

$$\oint_{C^*} y^2 dx + xydy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D -.ydxdy$$

$$= = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{2(1-\cos\theta)} -\rho sen\theta \cdot \rho d\rho d\theta = -\frac{8}{3} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{4}} (1-\cos\theta)^3 sen\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3}(1-\cos\theta)^4 \Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\frac{2}{3}\left(\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 \right) = -2,28676$$

Recta C_1 ($\overline{OP}$): $y = -\sqrt{3}x$

Parametrizando con x = t $\Rightarrow$ $c(t) = (t, -\sqrt{3}t), \quad t \in \left[-\frac{3}{2}, 0 \right]$

$$\int_{C_1^-} y^2 dx + xydy = \int_{-3/2}^{0} 3t^2 + t\sqrt{3}t\sqrt{3}dt = \int_{-3/2}^{0} 6x^2 dx = \frac{27}{4}$$

Recta C_2 ($\overline{OQ}$) : $y = x \quad \Rightarrow \quad c(t) = (t,t), \quad t \in \left[-\left(1+\sqrt{2}\right), 0 \right]$

$$\int_{C_2} y^2 dx + xydy = \int_{C_2} \left(t^2 + t^2\right) dt = 2 \int_{-\left(1+\sqrt{2}\right)}^{0} t^2 dt = \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^3$$

Finalmente

$$\int_C y^2 dx + xydy = \int_{C^*} y^2 dx + xydy - \int_{C_1} y^2 dx + xydy - \int_{C_2} y^2 dx + xydy$$

$$\int_C y^2dx + xydy \quad = -2,28 + \frac{27}{4} - \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)^3 .$$

Pregunta 3

Un campo vectorial F se define por $F = \nabla u$ y $\nabla^2 u = x + y + z$. Determine el flujo de F a través de la superficie cerrada limitada por el cono $(z-2)^2 = 3(x^2 + y^2)$ y el cilindro $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$

Solución:

Intersección entre cono y cilindro: $(z - 2)^2 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

$\Rightarrow \quad z = 2 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \;, \quad z = 4$

Flujo de F $= \iint_S F \cdot \hat{n} \; ds = \iiint_V \nabla \cdot F \; dx \; dy \; dz$

$$= \iiint_V (x + y + z) dx \; dy \; dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \int_{2-\sqrt{3}\rho}^{2+\sqrt{3}\rho} \left(\rho\left(\cos\theta + sen\theta\right) + z\right)\rho \; dz \; d\rho \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left[\rho^2 \left(\cos\theta + sen\theta\right) \cdot z + \rho \frac{z^2}{2} \right]_{\left(2-\sqrt{3}\right)\rho}^{\left(2+\sqrt{3}\right)\rho} d\rho \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left[\rho^2 \left(\cos\theta + sen\theta\right) \cdot 2\sqrt{3}\rho + \frac{\rho}{2}\left(\left(2 + \sqrt{3}\rho\right)^2 - \left(2 - \sqrt{3}\rho\right)^2\right)\right] d\rho \; d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} 2\sqrt{3}\rho^3 \left(-sen\theta + \cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{\rho}{2} \cdot 8\sqrt{3}\rho\theta\Big|_0^{2\pi} d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} 4\sqrt{3}\rho^2 d\rho = 8\sqrt{3}\pi \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 8\sqrt{3}\pi \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3}{3} = \frac{64\pi}{9}$$