CÁLCULO AVANZADO
P.E.P # 3 Segundo Semestre 2003-2004.
Puntajes y Soluciones. Santiago, enero 09 de 2004

1. Resolver $\int_C (1-x^2)y\,dx + x(1+4y^2)\,dy$ si C es dada por $x^2+4y^2=4$.

Solución:

Aplicando teorema de Green, Siendo $f(x,y)=(1-x^2)y, g(x,y)=x(1+4y^2)$ de clase $C^{(')}$ y C curva regular cerrada se tiene

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(1+4y^2-(1-x^2)\right)dxdy=\iint_D\left(x^2+4y^2\right)dxdy$$

Con D: $x^2+4y^2\leq 4$ con cambios de variables $x=2r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad j=2r$ se tiene

$$I=2\iint_{D'}\left(4r^2\cos^2\varphi+4r^2\sin^2\varphi\right)rdrdy$$
$$=2\iint_D\left(4r^3\right)drdy$$

Con D' : $0\leq r\leq 1$, $0\leq \varphi\leq 2\pi$,

$$I=2\int_0^{2\pi}\left(4r^3dr\right)dy$$

$$=2.2\pi\frac{4r^4}{4}\Big|_0^1=4\pi$$

otra alternativa de solución es directamente parametrizando C como $\vec{r}(t)=(2\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$

2. Calcular el área $A(S)$, de la parte de la superficie S del cilindro $y^2+z^2=a^2$ ubicada en el primer octante, acotada por los planos $x=0,\quad y=0,\quad z=kx,$ con $a>0,\quad k>0.$

Solución :

$$y^2+z^2=a^2 \quad\wedge\quad z=kx \quad\Rightarrow\quad y^2+k^2x^2=a^2 \quad o \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{\frac{a^2}{k^2}}=1$$

$$A(s)=\iint_s ds$$

$$x=u$$
$$y=a\cos v$$
$$z=a\sin v$$

$$T_n=\hat{i}$$

$$T_v=-a\sin v\,\hat{j}+a\cos v\,\hat{k}$$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a\sin v & a\cos v \end{vmatrix}$$

$$= -a\cos v\,\hat{j} - a\sin v\,\hat{k}$$

$$\|T_u \times T_v\| = a$$

$$A(s) = a\iint_{R_{uv}} du\,dv = a\frac{1}{8}\left(a\frac{a}{k}\pi\right) = \frac{a^3}{8k}\pi$$

3 Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $F = (z, x, y)$ y la superficie $z = x^2 - y^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución :

Para la integral de superficie $I_1 = \iint_s \nabla x \vec{F}\,\hat{n}\,dS$ se tiene $\vec{F} = (z, x, y)$ campo vectorial de clase C[(1)]

con $\nabla x \vec{F} = \nabla x(z, x, y) = (1,1,1), \hat{n} = \dfrac{(-2x_1 + 2y_1 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ $, dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$

$I_1 = \iint_D (-2x + 2y + 1)dxdy \quad con \quad D: x^2 + y^2 \le a^2$ con coordenadas polares

$$I_1 = \iint_{D'} (-2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi + 1)rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (-2r^2\cos\varphi + 2r^2\sin\varphi + r)dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a rdr\right)d\varphi = 2\pi\frac{a^2}{2} = \pi a^2$$

para la integral curvilinea $I_2 = \int_C \vec{F}\,d\,\vec{r} \quad con \quad \vec{F} = (z, x, y)$

parametrizando C como $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, -2a^2\cos 2t), \quad t \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, -2a^2\sin 2t)$ se tiene :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (a^2\cos 2t, a\cos t, a\sin t)(-a\sin t, a\cos t, -2a^2\sin 2t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\cos 2t - a^3\cos 2t\sin t - 2a^3\sin 2t\sin t)dt = \pi a^2$$