PAUTA TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2007

Pregunta 1

Un tanque de agua en forma de semiesfera tiene radio a,su base es su cara plana. Encontrar el volumen V de agua del tanque como función de h que es la profundidad del agua.

Solución

Consideraremos la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, y $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ la base del tanque. Sea V_1 el volumen del segmento esférico sobre el plano $z = h$ con $0 < h < a$.

En coordenadas cilíndricas su descripción es:

$0 \le r \le b = \sqrt{a^2 - h^2}$; $\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$; $\qquad h \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$

Así $V_1 = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \int\limits_h^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz dr d\theta$

$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{a^2-h^2}} (r\sqrt{a^2 - h^2} - hr) dr d\theta$

$= \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - h\frac{r^2}{2})/_0^{\sqrt{a^2-h^2}} d\theta$

$= \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{1}{3}h^3 - \frac{(a^2-h^2)h}{2}) d\theta = 2\pi \left[\frac{a^3-h^3}{3} - \frac{(a^2-h^2)h}{2}\right]$

Sea V el volumen del agua en el estanque en función de h, entonces

$V = \frac{2}{3}\pi a^3 - 2\pi \left[\frac{a^3-h^3}{3} - \frac{(a^2-h^2)h}{2}\right]$

$V = \pi \left[\frac{2}{3}h^3 + h(a^2 - h^2)\right]$

Pregunta 2

Aplique el teorema de Green para deducir que el área de la región $R \subseteq \mathbb{R}^2$ con frontera ∂R está dada por $\oint\limits_{\partial R} -y dx$. Aplique esto para calcular el área de la región plana R limitada por las curvas $y = x^2$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $y = -\sqrt{3}x$ y que contiene a $(0, 1)$

Solución

Sea $A = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ intersección de recta con circunferencia y $B(1, 1)$ intersección de parábola con circunferencia. La frontera de la región ∂r está formada por C_1 la parábola desde $O(0, 0)$ a $B(1, 1)$, C_2 la circunferencia recorrida desde $B(1, 1)$ a $A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, C_3 segmento de la recta desde $A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ a $O(0, 0)$.

Calculamos el área usando Green de la siguiente forma

$A = -\oint\limits_{\partial r} y dx = -\left[\int\limits_{C_1} y dx + \int\limits_{C_2} y dx + \int\limits_{C_3} y dx\right]$

$\int\limits_{C_1} y dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$C_2 : x = \cos\theta \qquad y = 1 + \sin\theta \qquad$ con $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$

$\int\limits_{C_2} y dx = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 + \sin\theta)(-\sin\theta) d\theta = -\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta$

$= -\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\theta d\theta - \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$

$= \left[\cos\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3}$

$\int\limits_{C_3} ydx = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} -\sqrt{3}xdx = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x^2\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Luego el área es:

$A = A(R) = -\left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{7}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{8} \approx 1.78$

Pregunta 3

Calcular el flujo hacia el exterior de la región encerrada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$, del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ directamente y usando el teorema de la divergencia de Gauss

Solución

Sean S_1 : superficie de la porción de paraboloide

S_2 : superficie de la porción del plano $z = 1$

$S = S_1 + S_2$

$\iint\limits_S F \cdot N dS = \iint\limits_{S_1} F \cdot N_1 dS + \iint\limits_{S_2} F \cdot N_2 dS$

$N_1 = \frac{(2x,2y,-1)}{\|(2x,2y,-1)\|}, \qquad N_2 = (0, 0, 1)$

$\iint\limits_{S_1} F \cdot N_1 dS = \iint\limits_{D_1} (x, y, z)(2x, 2y, -1)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy$

Usando coordenadas polares

$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} r^3 drd\theta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}/\,_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \iint\limits_{S_1} F \cdot N_1 dS = \frac{\pi}{2}$

$\iint\limits_{S_2} F \cdot N_2 dS = \iint\limits_{D_2} (x, y, z)(0, 0, 1)dxdy = \iint\limits_{D_2} zdxdy$

$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} rdrd\theta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}/\,_0^1 d\theta = \frac{1}{2}2\pi = \pi$

Luego

$\iint\limits_S F \cdot N dS = \frac{\pi}{2} + \pi = 3\frac{\pi}{2}$

Usando el teorema de la divergencia de Gauss

$divF = 1 + 1 + 1 = 3$

$\iint\limits_S F \cdot N dS = \iiint\limits_R divF dV$

$= \iiint\limits_R 3dV = 3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_{r^2}^{1} rdzdrd\theta$

$= 3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} r(1 - r^2)drd\theta = 3\int\limits_0^{2\pi} (\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4})/\,_0^1 d\theta =$

$= \frac{3}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{4}\theta/\,_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi$