UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

PAUTA TERCERA PEP
CALCULO AVANZADO

9 de Julio de 2004

Pregunta 1

Evalúe la siguiente integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 - y)^\alpha \, dxdy, \qquad \text{con} \quad \alpha > 0$$

Solución:

Dominio: y = 0, y = 1, $x = \sqrt{y}$, $x = 1$

Cambiando el orden de integración.

$$I(\alpha) = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 - y)^\alpha \, dydx = \int_0^1 \left[-\frac{1}{\alpha+1}(x^2 - y)^{\alpha+1} \right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{\alpha+1}\left[(x^2 - x^2)^{\alpha+1} - (x^2)^{\alpha+1}\right] dx = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+1} x^{2(\alpha+1)} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \cdot \left[\frac{x^{2\alpha+3}}{2\alpha+3} \right]_0^1 = \frac{1}{(\alpha+1)(2\alpha+3)}$$

Pregunta 2
Calcule

$$\int_C -\frac{x}{x^2-y^2}dx + \frac{y}{x^2-y^2}dy$$

donde C es una curva que une los puntos $(2,-1)$ y $(4,3)$

<u>Solución</u>:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-.x}{x^2-y^2}\right) = \frac{x(-2y)}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right) = \frac{-y\cdot 2y}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2-y^2)}$$

$\Rightarrow F(x,y) = \left(\dfrac{-x}{(x^2-y^2)^2}, \dfrac{y}{(x^2-y^2)}\right)$ es campo gradiente en la región limitada por las rectas

$y = \pm x$ donde están los puntos (2,-1) y (4, 3)

Determinamos $\phi(x,y)$ (función potencial tal que).

i) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = -\dfrac{x}{x^2-y^2}$ y ii) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{y}{x^2-y^2}$

por (i) $\phi(x,y) = \displaystyle\int \frac{-x}{x^2-y^2}dx + h(y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2) + h(y)$

$$\therefore \phi(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-y^2) + h(y)$$

Derivando y considerando (ii) se tiene.

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2-y^2} + h'(y) = \frac{y}{x^2-y^2} \Rightarrow h'(y) = 0$$

$$\therefore h(y) = c$$

Así es que. $\qquad \phi(x,y) = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2-y^2) + c$

$$\therefore \int_c \frac{-x}{x^2-y^2}dx + \frac{y}{x^2-y^2} = \phi(4,3) - \phi(2,-1) = -\frac{1}{2}\ln\left[\ln 7 - \ln 3\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

Pregunta 3

Utilice el teorema de Stokes para evaluar

$$\iint_S \nabla \times F \cdot N dS$$

donde $F(x,y,z) = (\frac{1}{2} z e^{4y^2}, -xz, 4(x^2+y^2))$, S es la porción del elipsoide $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1$ con $x \geq 1$ y N es la normal unitaria exterior al elipsoide.

Solución:

$$x = 1 \Rightarrow y^2 + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{3/4} + \frac{z^2}{12} = 1$$

Así

$$C : \frac{y^2}{3/4} + \frac{z^2}{12} = 1, \qquad x = 1$$

Parametrización de C:

$$\begin{array}{llll} x = 1 & & & dx = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t & 0 \leq t \leq 2\pi & \Rightarrow & dy = -\frac{\sqrt{3}}{2} sent dt \\ z = \sqrt{12} sent & & & dz = \sqrt{12}\cos t dt \end{array}$$

$$\iint_S \nabla \times F \cdot N dS = \oint_C F \cdot ds = \oint_C \frac{1}{2} z e^{4y^2} dx - xz dy + 4(x^2+y^2) dz$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sqrt{12} sent \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} sent dt \right) + 4\left(1 + \frac{3}{4}\cos^2 t\right) \cdot \sqrt{2}\cos t dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} sen^2 t dt + 8\sqrt{3} + \int_0^{2\pi} \cos t dt + 6\sqrt{3}\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt$$

$$= 3\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} sen 2t\right]_0^{2\pi} + 8\sqrt{3}\left[sent\right]_0^{2\pi} + 6\sqrt{3}\int_0^{2\pi} (1 - sen^2 t)\cos t dt$$

$$= 3\pi + 0 + 6\sqrt{3}\left[sent\right]_0^{2\pi} - 6\sqrt{3}\left[\frac{sen^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} \cos t dt$$

$$= 3\pi \, .$$