U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2007

Pregunta 1

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\text{si } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,\text{si } x=y=0 \end{cases}$$

a) Calcular $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

b) Determine $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ si $(x,y)\neq(0,0)$

c) Muestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ y explique por qué.

Solución

a) Partiendo por la definición se tiene:

$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0;\ x=y=0$

$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0;\ x=y=0$

b) Si $x^2+y^2\neq 0$ se tiene.

$f_x(x,y)=2y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+2xy\frac{(4xy^2)}{(x^2+y^2)^2};$

$f_y(x,y)=2x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-2xy\frac{(4xy^2)}{(x^2+y^2)^2};$

c) $f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2h\frac{h^2-0}{h^2+0}-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$

$=\lim_{k\to 0}\frac{-2k}{k}=-2$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=2\neq -2=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$$

Este resultado no contradice el teorema que establece que las derivadas parciales cruzadas son iguales cuando ellas son continuas, ya que, tanto f_{yx} como f_{xy} no son continuas en $(0,0)$.

Pregunta 2

a) Si $u = f(x, y, z)$ define una función diferenciable, y z se define implicitamente como una función de x e y por la ecuación $g(x, y, z) = 0$ con los atributos pedido en el teorema de la función implícita. Pruebe que

u tiene primeras derivadas parciales de x e y dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}} \;\; ; \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial y}{\partial z}}$$

b) Si $u = x^2y + z^2$, y $z = g(x, y)$ se define implicitamente po la ecuación $x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$

Calcule:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0, 0) \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0, 0)$$

Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

por otra parte si $g(x, y, z) = 0$ define implicitamente a $z = z(x, y)$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

reemplazando en la ecuación anterior

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

Similarmente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

b) En este caso $u = f(x, y, z) = x^2y + z^2$ y $z = z(x, y)$ se define implicitamente por $g(x, y, z) = x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$ y tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy \;,\; \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 8z^3 \;,\; \frac{\partial g}{\partial z} = -3 + 24yz^2$$

derivadas que son todas continuas por lo que se afirma que g es de C^1

Ademas $g(1, 0, 0) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 0) = -3 \neq 0$

Entonces por el teorema de la función implicita se tiene que existe $V = V_{\partial}(1,0)$ y una vecindad $(-a,a)$ de $z=0$

y una función $z(x,y)$ de C^1 sobre V tal que

$$z(1,0)=0 \ \text{ y } \ z(1,0)\epsilon(-a,a)$$

Ademas:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 2xy & 2z \\ 2xy & -3+24yz^2 \end{vmatrix} = 2xy(-3+24yz^2) - 2xy2z$$
$$= 2xy(-3+24yz^2-2z)$$

$\frac{\partial g}{\partial z} = -3+24yz^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy(-3+24yz^2-2z)}{-3+24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1,0,0) = \frac{0}{-3} = 0$$

También:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} x^2 & 2z \\ x^2+8z^3 & -3+24yz^2 \end{vmatrix} = -3x^2+24x^2yz^2-2x^2z-16z^3$$
$$= x^2(24yz^2-2z-3)-16z^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2(24yz^2-2z-3)-16z^3}{-3+24yz^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(1,0,0) = \frac{-3}{-3} = 1$$

Pregunta 3

Un avión consume combustible según la función $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$. El avión se mueve sobre la esfera terrestre asociada a la ecuación de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ (R › radio de la tierra)

Determinar el máximo consumo de combustible posible.

Solución

$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$;restricción $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\Rightarrow g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$$
$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)$$
$$\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z)$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{lrcl} 1) & xy^2z^2 = \lambda x & & \\ 2) & x^2yz^2 & = & \lambda y \\ 3) & x^2y^2z & = & \lambda z \\ 4) & x^2+y^2+z^2 & = & R^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x*(1)+y*(2)+z*(3) &\Rightarrow 3x^2y^2z^2=\lambda(x^2+y^2+z^2)\\ &\Rightarrow 3x^2y^2z^2=\lambda R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } (1) \quad xy^2z^2 &= \frac{3}{R^2}x^3y^2z^2\\ &\Rightarrow x(\frac{3x^2}{R^2}-1)y^2z^2=0\\ &\Rightarrow x=0 \ \ \nu \ \ y^2z^2=0 \ \ v \ \ 3x^2-R^2=0 \end{aligned}$$

1. Si $x=0$ en (2)

$$\begin{aligned} \lambda y &= 0 \Rightarrow \lambda=0 \ \ \nu \ \ y=0\\ \text{si } \lambda &= 0 \ \ \Rightarrow x=y=z=0 \text{ no puede ser}\\ \text{si } \lambda &\neq 0 \ \ , \ y=0 \quad \text{de}(4) \ z=\pm R \end{aligned}$$

Punto crítico $P_1=(0,0,\pm R)$

2. Si $y=0$, en (3)

$$\begin{aligned} \lambda z &= 0\\ \text{si } \lambda &= 0 \Rightarrow x=y=z=0 \text{ no puede ser}\\ \text{si } \lambda &\neq 0 \ , \ z=0 \quad \text{de } \ (4) \ \ x=\pm R \end{aligned}$$

Punto crítico $P_2=(\pm R,0,0)$

3. Si $z=0$, en (1)

$$\begin{aligned} \lambda x &= 0 \Rightarrow \lambda=0 \ \ \nu \ \ x=0\\ \text{si } \lambda &= 0 \Rightarrow x=y=z=0 \text{ no puede ser}\\ \text{si } \lambda &\neq 0 \ , \ x=0 \quad \text{de } \ (4) \ \ y=\pm R \end{aligned}$$

Punto crítico $P_3=(0,\pm R,0)$

4. Si $3x^2-R^2=0$

$$x=\pm\frac{R}{\sqrt{3}}$$

se obtiene

$$y=\pm\frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$z=\pm\frac{R}{\sqrt{3}}$$

Y todas las combinaciones son puntos críticos ahora

$$f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = 0$$

y en los otros puntos críticos

$$f(P) = ((\frac{R}{\sqrt{3}})^2)^3 = \frac{R^6}{27}$$

luego el máximo consumo de combustible es

$$\frac{R^6}{27}$$