U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2006

PROBLEMA 1

a) Considere la superficie S definida por la ecuación $xy - zx + y - x = 3$. Hallar todos los puntos de esta superficie en que los planos tangentes allí sean paralelos al plano $2x + z = 8$.

b) Pruebe que la recta normal en cualquier punto al cono $3x^2 + 3y^2 = z^2$ intersecta al eje z.

Solución:

a) La superficie $F(x, y, z) = xy - zx + y - x - 3 = 0$

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (y_0 - z_0 - 1, x_0 + 1, -x_0)$
Por la condición de paralelismo: $(y_0 - z_0 - 1, x_0 + 1, -x_0) = \lambda(2, 0, 1)$
de lo que resulta: $x_0 = -1; \lambda = 1; z_0 = y_0 - 3$
Todos los puntos requeridos son de la forma $(-1, t, t - 3)$

b) La superficie es $F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$

$$\nabla F(x, y, z) = (6x, 6y, -2z) \implies \nabla F(x_0, y_0, z_0) = (6x_0, 6y_0, -2z_0)$$

La recta normal en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\frac{x-x_0}{6x_0} = \frac{y-y_0}{6y_0} = \frac{z-z_0}{-2z_0}$$

haciendo $x = y = 0$ se obtiene $-\frac{x_0}{6x_0} = -\frac{y_0}{6y_0} = \frac{z-z_0}{-2z_0}$
$\implies \frac{z-z_0}{-2z_0} = -\frac{1}{6} \implies z = \frac{4}{3}z_0$
Luego la normal a la superficie en (x_0, y_0, z_0) intersecta al eje z en $(0, 0, \frac{4}{3}z_0)$

PROBLEMA 2

Sean x e y definidas como función de u y v implicitamente por las ecuaciones:
$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$
$x^2 + 2y^2 - u^2 + v^2 = 1$
Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$

Solución:

Definimos

$F(x, y, u, v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 1 = 0$
$G(x, y, u, v) = x^2 + 2y^2 - u^2 + v^2 - 1 = 0$

En términos de los jacobianos de F y G, las derivadas parciales

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}; \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

calculamos los Jacobianos

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} 2u & 2y \\ -2u & 4y \end{vmatrix} = 8yu + 4yu = 12yu$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)} = \begin{vmatrix} 2x & 2u \\ 2x & -2u \end{vmatrix} = -4xu - 4xu = -8xu$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 8xy - 4xy = 4xy$

tenemos entonces
$\frac{\partial x}{\partial u} = -3\frac{u}{x}; \frac{\partial y}{\partial u} = 2\frac{u}{y}$

Calculamos ahora la segunda derivada pedida
$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial x}{\partial u}) = \frac{\partial}{\partial u}(-3\frac{u}{x}) = -3\frac{x-u\frac{\partial x}{\partial u}}{x^2}$
$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{-3(x^2+3u^2)}{x^3}$

PROBLEMA 3
Determine la distancia más corta y más larga del origen a la curva intersección del paraboloide $z = \frac{7}{4} - x^2 - y^2$ y el plano $x + y + z = 2$

Solución:
En este caso es conveniente hallar los extremos del cuadrado de la distancia a partir del origen en vez de la distancia misma. Por lo tanto se debe hallar los extremos de la función:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
sujeto a las restricciones:

$g(x,y,z) = z - \frac{7}{4} + x^2 + y^2 = 0$
$h(x,y,z) = x + y + z - 2 = 0$

Para aplicar el método de multiplicadores de Lagrange se define

$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(z - \frac{7}{4} + x^2 + y^2) + \lambda_2(x + y + z - 2)$
condiciones necesarias para los extremos:

(1) $2(1+\lambda_1)x + \lambda_2 = 0$
(2) $2(1+\lambda_1)y + \lambda_2 = 0$
(3) $2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
(4) $z - \frac{7}{4} + x^2 + y^2 = 0$
(5) $x + y + z - 2 = 0$

$(1) - (2) : 2(1+\lambda_1)(x-y) = 0 \implies \lambda_1 = -1 \quad \text{o} \quad y = x$
si $\lambda_1 = -1$, entonces, de (1) $\lambda_2 = 0$ y de (3) $z = \frac{1}{2}$
con $z = \frac{1}{2}$ de (4) y (5) se obtiene $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación anterior, sus soluciones son $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2}$
$x = 1 \implies y = \frac{1}{2} \implies (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es punto crítico
$x = \frac{1}{2} \implies y = 1 \implies (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ es punto crítico

Por otra parte $(4)-(5): x^2+y^2-x-y+\frac{1}{4}=0$

si $y=x \implies 2x^2-2x+\frac{1}{4}=0$, resolviendo $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$

$x=y=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \implies z=\frac{4-2\sqrt{2}}{4} \implies (\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{4-2\sqrt{2}}{4})$ es punto crítico.
$x=y=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \implies z=\frac{4+2\sqrt{2}}{4} \implies (\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{4+2\sqrt{2}}{4})$ es punto crítico.

Así

$f_{\max}=f(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}, \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}, \frac{4\mp2\sqrt{2}}{4})=\frac{1}{4}(9+2\sqrt{2})$
$f_{\min}=f(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

Como la curva intersección del paraboloide y el plano es una curva cerrada, la distancia mínima y la distancia máxima al origen son respectivamente $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{(9+2\sqrt{2})}$. No necesitamos más prueba por las característiacas geométricas del problema.