UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

PAUTA

SEGUNDA PEP

CALCULO AVANZADO

5 de Noviembre de 2004

Pregunta 1

Se define una función f por

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & si \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & si \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a)Determine los puntos de $\mathbb{R}^2$ en los cuales f es continua.
b) Calcular $f_x(x,y), f_y(x,y)$ si existen.

Solución.-

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & si \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & si \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Si (x, y) ≠ (0, 0) , composición de funciones continuas es continua.

Suponga que (x, y) = (0,0) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{u\to 0} e^{-\frac{1}{u}}=0, \qquad u=x^2+y^2$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ y f es continua también en (0, 0).

b) En (x, y) ≠ (0, 0)

$$f_x(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot -2x\right)=\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot -2y\right)=\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

En (x, y) = (0, 0)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=0$$

$\therefore f_x(0,0)=0$

Por simetría también $f_y(0,0)=0$

Pregunta 2

Calcule la derivada direccional de $f(x,y,z) = xe^y + y$ en $P_0 = (1,1,2)$, en la dirección normal a la superficie $z = x^2 y + xy^2$ en P_0 en el sentido en que z crece.

Solución.-

$$\nabla f(x,y,z) = \left(e^y, xe^y + 1, 0\right) \Rightarrow \nabla f(1,1,2) = (e, e+1, 0)$$

Sea $g(x,y,z) = z - x^2 y - xy^2 = 0$

$$\nabla g(x,y,z) = \left(-2xy - y^2, -x^2 - 2xy, 1\right)$$

$$\nabla g(1,1,2) = \left(-3,-3,1\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{19}}\left(-3,-3,1\right)$$

$$D_{\hat{u}} f(1,1,2) = \nabla f \cdot \hat{u}$$

$$= (e, e+1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{19}}\left(-3,-3,1\right) = \frac{-3}{\sqrt{19}}\left(2e+1\right)$$

$$\therefore D_{\hat{u}} f(1,1,2) = \frac{-3}{\sqrt{19}}\left(2e+1\right)$$

Pregunta 3

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función al menos diferenciable dos veces. Verifique que w definida por $w(x,t) = g(x^2 - t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$w_{xx} - 4x^2 w_{tt} + 2w_t = 0$$

Solución.-

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = g'(x^2 - t)\cdot(2x)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2g'(x^2 - t) + 4x^2 g''(x^2 - t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g'(x^2 - t)\cdot(-1) = -g'(x^2 - t)$$

$$-4x^2 g''(x^2 - t) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g''(x^2 - t)$$

Sustituyendo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4x^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\frac{\partial w}{\partial t} = 2g'(x^2 - t) + 4x^2 g''(x^2 - t) - 4x^2 g''(x^2 - t) - 2g'(x^2 - t)$$
$$= 0$$

Pregunta 4

Determine y caracterice los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - yx^2 - xy$$

Solución:

(1) $f_x(x,y) = 3x^2 - 2xy - y = 0$; (2) $f_y(x,y) = 2y - x^2 - x = 0$

2 (1) + (2) : $5x^2 - 4xy - x = 0 \Rightarrow x(5x - 4y - 1) = 0$

Si $x = 0$, (2) $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow P_1 = (0,0)$ es punto critico

Si $x \neq 0 \Rightarrow 5x - 4y - 1 = 0 \Rightarrow 5x - 1 = 4y$

De (2) $4y = 2x^2 + 2x$, *entonces* $5x - 1 = 2x^2 + 2x \quad 0 \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$

De aquí se tiene: $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$ y $y_1 = 1, \quad y_2 = \dfrac{3}{8}$

$y = \dfrac{5x-1}{4} \Rightarrow y_1 = 1, \quad y_2 = \dfrac{3}{8}$

Así $P_2 = (1,1)$, $P_3 = (1/2, 3/8)$ son también puntos críticos de la función

Calculo de la Matriz Hessiana

$$H = \begin{bmatrix} 6x - 2y & -2x - 1 \\ -2x - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sus determinantes en los respectivos puntos son:

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}_2 = -1 < 0$ y $\mathrm{A}_1 = 0 \therefore (0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ es punto silla

$H(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}_2 = -1 < 0$ y $\mathrm{A}_1 = 4 \therefore (1,1,f(1,1)) = (1,1,0)$ es punto silla

$H(\frac{1}{2},\frac{3}{8}) = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}_2 = \frac{1}{2} > 0$ y $\mathrm{A}_1 = \frac{9}{4} > 0$

f tiene un mínimo local en $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{8})$