Calculo Avanzado
P.E.P#2 Segundo Semestre 2003.
12/12/2003 Solución.

1- Sea $f(x) = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

a) Determinar los puntos críticos de f(x, y).

b) Estudiar existencia de máximos, mínimos de *f(x,y)* y evaluarlos.

Solución:

De $f(x) = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, se tiene sistema para puntos críticos:

$$f_x(x,y) = 4xe^{-(x^2+y^2)} + (2x^2+y^2)(-2x)e^{-(x^2+y^2)} = (4x - 4x^3 - 2xy^2)e^{-(x^2+y^2)}$$
$$f_y(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} + (2x^2+y^2)(-2y)e^{-(x^2+y^2)} = (2y - 4x^2y - 2y^3)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 4x^3 - 2xy^2 = 0 \\ 2y - 4x^2y - 2y^3 = 0 \end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{l} 2x(2 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow$ i) $x=0,\ y=0 \Rightarrow P_0(0,0)$

ii) $x=0$, con $y \neq 0$, $2x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow P_1(0,1), P_2(0,-1)$

iii) $y = 0$ con $x \neq 0$, $2x^2 + y^2 = 2$

$\Rightarrow P_3(1,0), P_4(-1,0)$

son los puntos críticos de f

$$f_{xx} = e^{-(x^2+y^2)}(4 - 12x^2 - 2y^2 - 8x^2 + 8x^4 + 4x^2y^2) = e^{-(x^2+y^2)}(4 - 20x^2 - 2y^2 + 8x^4 + 4x^2y^2)$$
$$f_{yy} = e^{-(x^2+y^2)}(2 - 4x^2 - 6y^2 - 4y^2 + 8x^2y^2 + 4y^4) = e^{-(x^2+y^2)}(2 - 4x^2 - 10y^2 + 4y^4 + 8x^2y^2)$$
$$f_{xy} = e^{-(x^2+y^2)}(-4xy - 8xy + 8x^3y + 4xy^3) = e^{-(x^2+y^2)}(-12xy + 8x^3y + 4xy^3)$$

$\Rightarrow$

$$H(p_1) = e^{-1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} < 0, H(p_2) = e^{-1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} < 0, \quad H(p_3) = e^{-1}\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0, \quad f(1,0) = 2e^{-1}$$

es máximo ya que $f_{xx}(1,0) = -8$

$$H(p_4) = e^{-1}\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0 \quad f_{xx}(-1,0)=-8 \text{ implica } f(-1,0) = 2e^{-1} \textit{máximo} \text{ local}$$

$$H(p_0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad f_{xx}(0,0) = 4 \quad \text{implica} \quad f(0,0) = 0 \quad \text{es minimo}$$

2- a) Calcular el volumen V del sólido que tiene como base en el plano XY el dominio limitado por $y = x^2$, $y = 2x^2$, y = 2, acotado inferiormente por z = 0 y superiormente por superficie $z = xy$.

b) Determinar la masa M(a, b) de la región plana limitada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si la

densidad en cada punto P = (x, y) es dada por d(x, y) = $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

Solución:

a) $$V = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} xydx \right) dy = \int_0^2 \frac{x^2 y}{2} \Bigg|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4} dy = \frac{y^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

(con integral doble)

o

$$V = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} \int_0^{xy} dzdx \right) dy = \int_0^2 \frac{x^2 y}{2} \Bigg|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4} dy = \frac{y^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

b) $$M(a,b) = \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} dxdy, \quad \text{si D :} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

Con cambio de coordenadas $x = ar\cos(\varphi), y = brsen(\varphi)$,

J = abr se obtiene $M(a,b) = ab\iint_{D'} \sqrt{(1 - r^2)} abrdrd\theta$

D' : $0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le r \le 1 \;\Rightarrow\; M(a,b) = ab\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2)^{1/2} rdr \right) d\theta$

$$= \frac{ab}{-2}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \Big|_0^1 d\theta = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3} ab$$

3.- Considerar la ecuación $F(x,y) = y^2 - xy - x^2 y + x^3 = 0$

a) Estudiar la posibilidad de que esta ecuación defina *y = y(x)* diferencialmente en vecindad de puntos P = (*a,a*), $a \in \Re$. Cuando así ocurra calcular *y'(x)*.

b) Estudiar la posibilidad de que esta ecuación defina *x = x(y)* diferenciable en vecindad de puntos P (a, a^2), a $\in \Re$. Cuando así ocurra calcular *x'(y)*.

Solución :

Con $F(x,y) = y^2 - xy - x^2 y + x^3 = 0$ se tiene:

a)

i) $F(a,a) = a^2 - a^2 - a^3 + a^3 \equiv 0$

ii) $F_x = -y - 2xy + 3x^2 \quad F_y = 2y - x - x^2$ continuas en toda $V(a,a)$

iii) $F_y(a,a) = 2a - a - a^2 = a(1-a) \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 1$

Entonces en cada V(*a,a*) con $a \neq 0$, $a \neq 1$ existe *y = y(x)* con derivada

$$y'(x) = -\frac{-y - 2xy + 3x^2}{2y - x - x^2}$$

b)

i) $F(a,a^2) = a^4 - a^3 - a^4 + a^3 \equiv 0$

ii) $F_x = -y - 2xy + 3x^2, \quad F_y = 2y - x - x^2$ continuas en toda $V(a,a^2)$

iii) $F_x(a,a^2) = -a^2 - 2a^3 + 3a^2 = 2a^2(1-a) \neq 0$ si $a \neq 0, \quad a \neq 1$

Entonces en cada $V(a,a^2)$ con $a \neq 0$, a $\neq$ 1 existe *x = x(y)* con derivada

$$x'(y) = -\frac{2y - x - x^2}{-y - 2xy + 3x^2}$$