U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2007

Pregunta 1

Calcule la derivada direccional en el punto $P_0(1,2,1)$ de la función $f(x,y,z) = x^3 + 4xy + z^2 - 2yz$ en la dirección que se indica:

a) En la dirección hacia el origen

b) En la dirección en que la derivada direccional tenga su máximo valor

c) En la dirección de la tangente a la curva $c(t) = (t, 2t^2, t^3)$ en dicho punto.

Solución

a) $\vec{a} = (0-1, 0-2, 0-1) = (-1,-2,-1) \implies \hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$

$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f(P_0) \cdot \hat{u}$ pero

$$\nabla f(P) = (3x^2 + 4y, 4x - 2z, 2z - 2y) \implies \nabla f(P_0) = (11, 2-2)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = (11, 2-2) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)) = -\frac{13}{\sqrt{6}}$$

b) Como $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = \nabla f \cdot \hat{u} = \|\nabla f\| \cos\theta$ es máximo si $\cos\theta = 1$

$\therefore$ El máximo valor se da cuando el ángulo entre $\nabla f(P_0)$ y $\hat{u}$ es cero, es decir cuando $\nabla f(P_0)$ y $\hat{u}$ son paralelos, en tal caso:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(P_0)/_{máx} = \|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{121+4+4} = \sqrt{129}$$

c) $c(t) = (t, 2t^2, t^3) \implies c'(t) = (1, 4t, 3t^2)$ en $P_0(1,2,1)$ cuando $t = 1$

La dirección de la tangente de la curva en P_0 es:

$$c'(1) = (1,4,3) y \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}(1,4,3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}(11,2,-2) \cdot (1,4,3) = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$$

Pregunta 2

Una función $z = z(x, y)$ se dice que es armónica si tiene derivadas parciales de segundo orden, continuas y además

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

a) Sean $u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{y}{x^2+y^2}$. Pruebe que

i) u y v son armónicas

ii) $(u_x)^2 = (v_y)^2$

iii) $(u_y)^2 = (v_x)^2$

iv) $u_x v_x = -u_y v_y$

b) Pruebe que:

Si $f(x, y)$ es una función armónica, entonces la función $w(x, y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ es también armónica.

Solución:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, u_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v = \frac{y}{x^2 + y^2} \implies v_x = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, v_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2)2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$u_{yy} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 + 2xy2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

De lo anterior se deduce claramente que
$u_{xx} + u_{yy} = 0$ y similarmente $v_{xx} + v_{yy} = 0$
Además:

$$(u_x)^2 = (\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2})^2 = (\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2})^2 = (v_y)^2$$

$$(u_y)^2 = (-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2})^2 = (v_x)^2$$

$$u_x v_x = \frac{-2xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} = -u_y v_y$$

b)

$$w_x = \frac{\partial f}{\partial u}u_x + \frac{\partial f}{\partial v}v_x \qquad w_y = \frac{\partial f}{\partial u}u_y + \frac{\partial f}{\partial v}v_y$$

$$w_{xx} = [\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u_x + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}v_x]u_x + \frac{\partial f}{\partial u}u_{xx} + [\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u_x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v_x]v_x + \frac{\partial f}{\partial v}v_{xx}$$

$$w_{yy} = [\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u_y + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}v_y]u_y + \frac{\partial f}{\partial u}u_{yy} + [\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u_y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v_y]v_y + \frac{\partial f}{\partial v}v_{yy}$$

Desarrollando:

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}u_x v_x + \frac{\partial f}{\partial u}u_{xx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u_x v_x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_x)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}v_{xx}$$

$$w_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}u_y v_y + \frac{\partial f}{\partial u}u_{yy} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u_y v_y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_y)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}v_{yy}$$

utilizando las igualdades establecidas en (a) se tiene

$$w_{xx} + w_{yy} = [\tfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}](u_x)^2 + \tfrac{\partial f}{\partial u}(u_{xx} + u_{yy}) + [\tfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \tfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}](v_x)^2 + \tfrac{\partial f}{\partial v}(v_{xx} + v_{yy}) = 0$$

Pregunta 3
Un triángulo isosceles de perímetro p (base a y lados iguales l) gira alrededor de su base.

a) Pruebe que el volumen de la figura obtenida al hacer girar este triángulo alrededor de su base en función de sus lados es

$$V = \frac{a\pi l^2}{3} - \frac{a^3\pi}{12}$$

b) Determine las dimensiones de los lados de tal triángulo para que el volumen del sólido generado sea máximo.

Solución

a) Sea H la altura del triángulo $H^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2$

$\frac{V}{2} = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} (\frac{2H}{a}x)^2 dx = \frac{4H^2\pi}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{aH^2\pi}{6}$
$\implies V = \frac{aH^2\pi}{3}$
Reemplazando H^2 se tiene: $V = \frac{a\pi l^2}{3} - \frac{a^3\pi}{12}$

b) Condición $2l + a = p$

Formamos la función de Lagrange:
$F(l, a, \lambda) = \frac{al^2\pi}{3} - \frac{a^3\pi}{12} + \lambda\,(2l + a - p)$

1. $F_l = \frac{2al\pi}{3} + 2\lambda = 0$
2. $F_a = \frac{l^2\pi}{3} - \frac{a^2\pi}{4} + \lambda = 0$
3. $F_\lambda = 2l + a - p = 0$

A (1) restando dos veces (2) se tiene:

$$\frac{2al\pi}{3} - \frac{2l^2\pi}{3} + \frac{a^2\pi}{2} = 0$$

multiplicando por $\frac{6}{\pi}$ se tiene la ecuación:

$$4l^2 - 4al - 3a^2 = 0$$

Resolviendo para l

$$l = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 + 48a^2}}{8} = \frac{4a \pm 8a}{8} \implies l = \frac{3a}{2}$$

Sustituyendo en $2l + a - p = 0$ se tiene:

$$3a + a - p = 0 \implies a = \frac{p}{4}$$

$$l = \frac{p - a}{2} = \frac{3p}{8} \implies l = \frac{3}{8}p$$

Para que el volumen sea máximo, la base del triángulo isosceles debe ser $\frac{p}{4}$ y los lados $\frac{3}{8}p$ cada uno.