USACH
DMCC

PAUTA SEGUNDA PEP

CALCULO AVANZADO

4 de Junio de 2004

Pregunta 1

Se define una función f por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Calcular $f_x(0,0), f_y(0,0)$; $f_x(x,y), f_y(x,y)$, $(x,y)\neq(0,0)$

b) Estudie si f es diferenciable en (0,0).

c) Calcular la derivada direccional de f en (0,0) en la dirección $\hat{e}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Solución.-

a) $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2+0]^{\frac{1}{2}}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)|\Delta x|}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)}{|\Delta x|} \quad \text{no existe}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0}{[(0+\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0$$

$$f_x(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-x^2\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{2x^3+2xy^2-x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_y(x,y)=x^2(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall(x,y)\neq(0,0)$$

b) No es diferenciable en (0,0) pues $f_x(0,0)$ no existe.

c) $$D_{\hat{e}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{\sqrt{2}}h,\frac{1}{\sqrt{2}}h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\frac{1}{2}h^2}{(\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h^2)^{\frac{1}{2}}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\frac{h^2}{h|h|}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|} \qquad \text{este límite no existe}$$

Luego , no existe esta derivada.

Pregunta 2

Pruebe que cualquier función definida de la forma

$$z = f(x+y) + e^{y} g(x-y)$$

donde f y g son funciones al menos dos veces diferenciables , es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución.- Si $z = f(x+y) + e^{y} g(x-y)$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+y) + e^{y} g'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x+y) + e^{y} g''(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+y) + e^{y} g(x-y) - e^{y} g'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(x+y) + e^{y} g(x-y) - 2e^{y} g'(x-y) + e^{y} g''(x-y)$$

Reemplazando en la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \; & f''(x+y) + e^{y} g''(x-y) \\ & - \left(f''(x+y) + e^{y} g(x-y) - 2e^{y} g'(x-y) + e^{y} g''(x-y) \right) \\ & - \left(f'(x+y) + e^{y} g'(x-y) \right) + \; f'(x+y) + e^{y} g(x-y) - e^{y} g'(x-y) \\ = \; & 0\end{aligned}$$

USACH
DMCC

Pregunta 3

Un cometa se desplaza por la parábola $x^2 + y^2 + 2xy - y + x + 1 = 0$. Si consideramos a la tierra como un punto situado en (0,0), que tan cerca de la tierra puede llegar el cometa.
Nota.- puede considerar la función distancia por $f(x,y) = x^2 + y^2$

Solución.- Definimos $F(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 + 2xy - y + x + 1)$ y derivando F se tiene

(1) $F_x(x;y;\lambda) = 2x - \lambda(2x + 2y + 1) = (2 - 2\lambda)x - 2\lambda y - \lambda = 0$

(2) $F_y(x,y,\lambda) = 2y - \lambda(2y + 2x - 1) = (2 - 2\lambda)y - 2\lambda x + \lambda = 0$

(3) $F_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 + 2xy - y + x + 1) = 0$

Consideramos primero el sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \lambda^2 = 1 - 2\lambda$$

Primer caso:

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación (1) se tiene $x - y = \frac{1}{2}$. Reemplazando en (3) queda $(x+y)^2 + \frac{1}{2} + 1 = 0$ lo cual es imposible para todo x, y.

Segundo caso: $\lambda \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = 1 - 2\lambda \neq 0$

Resolviendo el sistema se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}^{-1} \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{2(1-2\lambda)}\begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 2\lambda - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = -\frac{\lambda}{2}$$

Reemplazando en (3) se tiene $\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$

Así la distancia mínima es $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$