Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

PAUTA: PEP # 2 – CALCULO AVANZADO

(1 de Agosto de 2003)

Pregunta 1

Para $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x+y)}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \text{ si } \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Determine los puntos (x, y) de IR^2 en los cuales f es continua

b) Calcular, si existen, f_x, f_y en IR^2

c) Determine, si existe, la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, $u=(a,b)\neq(0,0)$

Solución.-

a) En $(x,y)\neq(0,0)$, f es cuociente de funciones continuas.

$\therefore$ f es continua $\forall(x,y)\neq(0,0)$

En $(x,y)=(0,0)$, considerar una trayectoria como por ejemplo $y=ax$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+ax)}{x^2+a^2x^2}=\dfrac{1+a}{1+a^2}$, no hay límite

Por lo tanto f no es continua en $(0,0)$

b) Para $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{2xy^2-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad\qquad f_y(x,y)=\frac{x^2-xy^2-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Para $(x,y)=(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h(h)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} \quad \text{este límite no existe}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0(h)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0 \quad \Rightarrow\therefore\ f_y(0,0)=0$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(a,b))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a(a+b)}{t(a^2+b^2)}$$

este límite existe ssi $a(a+b)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \quad \vee \quad a+b=0$

Si $u=(0,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0$

Si $u=(a,-a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0$

Pregunta 2

El elipsoide $(x-a)^2+2(y-b)^2+4(z-c)^2=p^2$, $p>0$, es tangente al plano $x+y+z=0$. Determine la relación existente entre a, b, c y p.

Solución.-

$$\nabla F(x,y,z)=(2(x-a),4(y-b),8(z-c)=\lambda(1,1,1)$$

de donde resulta $\quad x=a+\dfrac{\lambda}{2}, \quad y=b+\dfrac{\lambda}{4}, \quad z=c+\dfrac{\lambda}{8}$

o $\quad x-a=\dfrac{\lambda}{2}, \quad y-b=\dfrac{\lambda}{4}, \quad z-c=\dfrac{\lambda}{8}$

reemplazando en la ecuación del elipsoide se tiene

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+2\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2+4\left(\frac{\lambda}{8}\right)^2=p^2 \quad \Rightarrow \quad 7\lambda=16p^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm\frac{4}{\sqrt{7}}p$$

En el punto de tangencia

$$x=a\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{4p}{\sqrt{7}}, \quad y=b\pm\frac{1}{4}\cdot\frac{4p}{\sqrt{7}}, \quad z=c\pm\frac{1}{8}\cdot\frac{4p}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \quad x+y+z=a+b+c\pm\frac{p}{\sqrt{7}}\left(2+1+\frac{1}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow\therefore \quad a+b+c+=\mp\frac{\sqrt{7}}{2}p$$

Pregunta 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$

Calcule

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x}$$

Solución.- Sea $v = x^2 - y^2$

Primeras derivadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(v) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'(v)$$

Aplicando la regla de la cadena las segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\left[f'(v) + 2x^2 f''(v)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\left[f'(v) - 2y^2 f''(v)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -4xyf''(v)$$

Sustituyendo

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 2y^2\left[f'(v) + 2x^2 f''(v)\right]$$

$$-2x^2\left[f'(v) - 2y^2 f''(v)\right] - 8x^2 y^2 f''(v) - 2y^2 f'(v) + 2x^2 f'(v) = 0$$