U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2007

Pregunta 1
Considere la función $f(t) = t - \frac{p}{2}$ definida en $\left[0, \frac{p}{2}\right]$

a) Obtenga la serie de Fourier de senos de esta función.

b) Pruebe que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4}$

Solución:

a) Haremos una extención impar de $f(t)$ y como consecuencia de esto se tiene:

$$a_{n=0} \quad todo\ n = 0, 1, 2, 3......$$

....0.2

$$b_n = \frac{2}{\frac{p}{2}} \int_0^{\frac{p}{2}} (t - \frac{p}{2}) sen(\frac{n\pi}{\frac{p}{2}} t) dt = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} (t - \frac{p}{2}) sen(\frac{2n\pi}{p} t) dt$$

$$b_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} t sen(\frac{2n\pi}{p} t) dt - 2 \int_0^{\frac{p}{2}} sen(\frac{2n\pi}{p} t) dt$$

....0.2

$$\int_0^{\frac{p}{2}} t sen(\frac{2n\pi}{p} t) dt = -\frac{pt}{2n\pi} \cos(\frac{2n\pi}{p} t) \mid_0^{\frac{p}{2}} + \frac{p}{2n\pi} \int_0^{\frac{p}{2}} \cos(\frac{2n\pi}{p} t) dt = -\frac{p^2}{4n\pi} \cos(n\pi)$$

$$\int_0^{\frac{p}{2}} sen(\frac{2n\pi}{p} t) dt = \frac{p}{2n\pi} \cos(\frac{2n\pi}{p} t) \mid_0^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0))$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{4}{p} (-\frac{p^2}{4n\pi} \cos(n\pi)) + 2 \frac{p}{2n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0))$$

....0.2

$$= -\frac{p}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{p}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{p}{n\pi} = -\frac{p}{n\pi}$$

....0.2

La serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{p}{n\pi})sen(\frac{2n\pi}{p}t)$$

....0.2

b) Si $t = \frac{p}{4}$

....0.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{p}{n\pi})sen(\frac{n\pi}{2}) = -\frac{p}{4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ... = \frac{\pi}{4}$$

....0.6

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4}$$

....0.2

Pregunta 2

Un edificio de 10 pisos de forma cilíndrica con una base que es una circunferencia de 30 mts de radio, tiene una escalera adosada por el exterior en forma de espiral cuya ecuación paramétrica es $r(t) = (30\cos(t), 30sen(t), bt)$

a) Probar que las rectas tangentes en cada punto a la espiral forman un ángulo constante con el eje z.

b) Determinar el valor que debe tomar b para que el ángulo sea 60°

c) Determinar la longitud de la rampa de la escalera medida por el lado interior desde el suelo hasta el último piso(considerar que cada vez que t se incrementa en 2π se sube un piso).

Solución:

$r(t) = (30\cos t, 30sent, bt)$

$\Longrightarrow r'(t) = (-30sent, 30\cos t, b)$ y $\| r'(t) \| = \sqrt{30^2 + b^2}$

....0.5

a) $\cos(\theta) = \frac{(-30sen(t_0), 30\cos(t_0), b)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{30^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{30^2+b^2}}$ es constante

$\therefore \theta$ es constante.

....0.5

b) $\cos(60°) = \frac{1}{2} = \frac{b}{\sqrt{30^2+b^2}} \Longrightarrow 30^2 + b^2 = 4b^2 \Longrightarrow b^2 = 300$

$\therefore b = 10\sqrt{3}$

....0.5

c) $s(t) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{30^2 + b^2} dt = \sqrt{30^2 + b^2}\, t \,|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{30^2 + b^2}$ cada piso

$\therefore$ Longitud de la rampa es $= 20\pi\sqrt{30^2 + b^2}$

....0.5

Pregunta 3

Dada la curva regular $r(t) = (\cos^2 t, sen^2 t, t+1)$, se pide:

a) Hallar los vectores $\widehat{T}$,$\widehat{N}$ y $\widehat{B}$ en el punto P=(1,0,1)

b) Hallar la ecuación de la recta normal en el punto P.

c) Hallar la ecuación del plano rectificante en P.

d) Hallar la curvatura en P.

c) Si la curva es plana, hallar la ecuacion del plano que la contiene.

Solución:

$r(t_0) = P = (1,0,1) \implies t_0 = 0$

$r'(t) = (-sen2t, sen2t, 1) \implies r'(0) = (0,0,1)$

$r''(t) = (-2\cos 2t, 2\cos 2t, 0) \implies r''(0) = (-2,2,0)$

$r'(0) \times r''(0) = (-2,-2,0)$ y $\| r'(0) \times r''(0) \| = 2\sqrt{2}$

....0.4

a) $\widehat{T} = (0,0,1)$, $\widehat{B} = \frac{(-2,-2,0)}{2\sqrt{2}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$\widehat{N} = \widehat{B} \times \widehat{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \implies \widehat{N} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

....0.6

Recta Normal:

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t(-1,1,0)$$

$$ó \ \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1},\ z = 1$$

....0.2

c) Plano Rectificante:

$$[(x,y,z) - (1,0,1)] \cdot \widehat{N} = 0 \implies (x-1, y, z-1) \cdot (-1,1,0) = 0$$

$$\implies x - y - 1 = 0$$

....0.2

d) $K(0) = \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{1^3} = 2\sqrt{2}$

....0.2

e) $\tau(t) = \frac{r'(t) \cdot r''(t) \times r'''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} -sen2t & sen2t & 1 \\ -2\cos 2t & 2\cos 2t & 0 \\ 4sen2t & -4sen2t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$

$\therefore$ $r(t)$ es una curva plana.

....0.2

Además:

$$x = \cos^2 t, y = sen^2 t, z = t + 1$$

$$\Longrightarrow \quad x + y = 1$$

....0.2