PAUTA PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2006
29 de Septiembre de 2006

PROBLEMA 1

Suponga que $f(t) = \cos(at)$ en $]0, \pi[$ y a no es un entero.

a) Obtenga el desarrollo cosenoidal de medio rango para esta función.

b) Usando el resultado obtenido en a) y asignando un valor adecuado a t, pruebe que:

$\cot(a\pi) = \frac{1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$

indicación:

1. $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
2. $\sin(\alpha \pm n\pi) = (-1)^n \sin\alpha$

SOLUCIÓN

a) Debemos hacer una extensión par de $f(t) = \cos(at)$ hacia el intervalo $(-\pi, 0)$ y tomamos la función entre $-\pi$ y π periódica de período 2π.

$b_n = 0$ para todo n

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(at)dt = \frac{1}{\pi a} sen(at)|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi a} sen(a\pi)$

$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left[\cos(a+n)t + \cos(a-n)t\right] dt$

$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(a+n)t}{a+n} + \frac{\sin(a-n)t}{a-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right]$

$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{a+n} + \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{a-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2a}{a^2-n^2} (-1)^n \sin(a\pi)$

La serie cosenoidal de medio rango para esta función es:

$\frac{1}{\pi a} sen(a\pi) + \frac{2a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{a^2-n^2} \cos(nt)$

b) Por el teorema de convergencia y tomando $t = \pi$

$\frac{1}{\pi a} sen(a\pi) + \frac{2a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{a^2-n^2} \cos(n\pi) = \cos(a\pi)$

$\Longrightarrow \frac{1}{\pi a} sen(a\pi) + \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2} = \cos(a\pi)$

Dividiendo por $\sin(a\pi)$ se tiene

$\cot(a\pi) = \frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2}$

es decir

$\cot(a\pi) = \frac{1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$

PROBLEMA 2

Para la curva C de $\mathbb{R}^3$determinada por la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ con el plano $z=4y$ se pide:

a) Obtener una representación vectorial del tipo $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ $t\in[a,b]$

b) Determinar los vectores unitarios $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$ en el punto $P_0=(0,1,4)$

c) Calcular la curvatura $\kappa(t)$ en cada punto de la curva C y obtener los puntos de curvatura máxima y de curvatura mínima, si es que existen.

SOLUCIÓN

a) $C: x^2+y^2=1;\ z=4y$

Sea $x=\cos(t)$; $y=\sin(t)$; $t\in[0,2\pi]$
entonces $z=4\sin(t)$
luego
$C:\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t),4\sin(t))$ $t\in[0,2\pi]$

b) $\vec{r}'(t)=(-\sin(t),\cos(t),4\cos(t))$

$\vec{r}''(t)=(-\cos(t),-\sin(t),-4\sin(t))$

$P_0=(0,1,4)$ se obtiene en $t=\frac{\pi}{2} \implies \vec{r}'(\frac{\pi}{2})=(-1,0,0)$ y
$\vec{r}''(\frac{\pi}{2})=(0,-1,4)$

$$\hat{T}(\tfrac{\pi}{2})=\frac{\vec{r}'(\frac{\pi}{2})}{\|\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\|}=(-1,0,0)$$
$$\hat{N}(\tfrac{\pi}{2})=\frac{\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}'(\frac{\pi}{2})}{\|\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\|}$$
$$\vec{r}'(\tfrac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\tfrac{\pi}{2})=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&0&0\\0&-1&-4\end{vmatrix}=(0,-4,1)$$
$$\vec{r}'(\tfrac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\tfrac{\pi}{2})\times\vec{r}'(\tfrac{\pi}{2})=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\0&-4&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=(0,-1,4)$$
$$\hat{N}(\tfrac{\pi}{2})=\frac{1}{\sqrt{17}}(0,-1,-4)$$
$$\hat{B}\ (\tfrac{\pi}{2})=\frac{\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\frac{\pi}{2})}{\|\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\frac{\pi}{2})\|}=\frac{1}{\sqrt{17}}(0,-4,1)$$

c) $\kappa(t)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-\sin t&\cos t&4\cos t\\-\cos t&-\sin t&-4\sin t\end{vmatrix}=$$
$=(-4\sin(t)\cos(t)+4\sin(t)\cos(t),-(4\sin^2(t)+4\cos^2(t)),\sin^2(t)+\cos^2(t))$
$=(0,-4,1)$ y $\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|=\sqrt{17}$

$$\kappa(t)=\frac{\sqrt{17}}{(\sin^2(t)+\cos^2(t)+16\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$
$$\kappa(t)=\frac{\sqrt{17}}{(1+16\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$
$\kappa(t)_{\text{max}}$ se obtiene en $t=\frac{\pi}{2}$ y $K(\frac{\pi}{2})=\sqrt{17}$
$\kappa(t)_{\text{min}}$ se obtiene en $t=0$, $t=\pi$, $t=2\pi$
$\kappa(0)=\frac{1}{\sqrt{17}}$

PROBLEMA 3

La trayectoria de una curva se define por $\vec{r}(t) = (t - \cos(t), 3 + \sin(2t), 1 + \cos(3t))$.Se pide

a) Probar que el vector aceleración $a(t)$ en el punto $t = 0$ pertenece al plano osculador.

b) Determine la ecuación del plano osculador a la curva en $(-1, 3, 2)$

c) Calcule $\tau(0)$

SOLUCIÓN

a) $\vec{r}(t) = (t - \cos(t), 3 + \sin(2t), 1 + \cos(3t)) \implies \vec{r}(0) = (-1, 3, 2)$

$\vec{r}'(t) = (1 + \sin(t), 2\cos(2t), -3\sin(3t) \implies \vec{r}'(0) = (1, 2, 0)$

$\vec{r}''(t) = (\cos(t), -4\sin(2t), -9\cos(3t)) \implies \vec{r}''(0) = (1, 0, -9)$

Como $a(t) = \vec{r}''(t) \implies a(0) = (1, 0, -9)$

$\hat{B}$ es paralelo a $\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)$ y $\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = (-18, 9, -2)$

$\therefore \hat{B}$ es paralelo a $(-18, 9, -2)$

Por otra parte,
$a(0) \cdot \hat{B} = (1, 0, -9) \cdot (-18, 9, -2) = 0$
$\therefore a(0)$ pertenece al plano osculador en $(-1, 3, 2)$

b) Plano osculador por $(-1, 3, 2)$ es $(x + 1, y - 3, z - 2) \cdot (-18, 9, -2) = 0$

$\therefore 18x - 9y + 2z + 41 = 0$ es la ecuación del plano osculador en $(-1, 3, 2)$

c) $\vec{r}'''(t) = (-\sin(t), -8\cos(2t), 27\sin(3t))$

$\vec{r}'''(0) = (0, -8, 0)$

$\tau(0) = \frac{[\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)] \cdot \vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|^2}$

$[\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)] \cdot \vec{r}'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -72$

$\tau(0) = \frac{-72}{18^2 + 9^2 + 2^2} = \frac{-72}{409}$