USACH
DMCC

**PAUTA PRIMERA PEP**
CALCULO AVANZADO

24 de Septiembre de 2004

**Pregunta 1**

Sea $f(x) = sen^2 x$

a) Si $f$ está definida en $\mathbb{R}$ . ¿Cuál es su período ?

b) Suponga que $f$ está definida en $[0,\pi]$, obtenga una serie de Fourier de senos asociada a $f$ .

c) Utilice los resultados anteriores para calcular la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9\cdot 11} - \frac{1}{11\cdot 13\cdot 15} + \frac{1}{15\cdot 17\cdot 19} - \cdots$$

**Solución:**

a) El período de $f(x) = sen^2 x$ es $\pi$ .

b) $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

La serie de Fourier pedida es $\sum_1^\infty b_n sen(nx)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi sen^2 x sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) sen(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sen(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x sen(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^\pi - \left(-\frac{\cos(2+n)\pi}{2(2+n)} - \frac{\cos(n-2)\pi}{2(n-2)}\right)\Bigg|_0^\pi \qquad , \ n \neq 2$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos 0}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(2+n)\pi}{2(2+n)} - \frac{\cos(n-2)\pi}{2(n-2)} + \frac{\cos 0}{2(n+2)} + \frac{\cos 0}{2(n-2)}\right)$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{2}{n} - \frac{2\cos n\pi}{n}\right) + \left(-\frac{1}{n+2} + \frac{\cos(2+n)\pi}{n+2}\right) + \left(-\frac{1}{n-2} + \frac{\cos(n-2)\pi}{n-2}\right)\right]$$

De aquí se deduce que $b_n = 0 \quad todo \;\; n \quad par,$ incluso $n = 2$

Si <u>n = 2</u> $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sen2xdx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x \cdot sen2xdx$

$$\int_0^\pi sen\,2xdx = -\frac{\cos 2x}{2}\Bigg|_0^\pi = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 0}{2} = 0$$

$$\int_0^\pi sen2xsen2xdx = \frac{1}{4}sen^2 2x\Bigg|_0^\pi = 0$$

Por lo tanto $b_n = 0$ para todo n par

Si n es impar.

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n-2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n} - \frac{4n}{n^2-4}\right) = \frac{-8}{\pi n(n^2-4)}$$

Así, con n = 2k – 1 obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)(2k-3)(2k+1)}sen(2k-1)x$$

$$= -\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}sen(2k-1)x$$

c) Con $x = \frac{\pi}{2}$, $\quad f(x) = sen^2\frac{\pi}{2} = 1$ **y** $\quad sen(2k-1)\frac{\pi}{2} = -(-1)^k$

El teorema de convergencia asegura que

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)(2k+1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{\pi} = \frac{-1}{-1\cdot 1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} - \cdots$$

Lo que prueba que

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} - \frac{1}{7\cdot 9\cdot 11} + \cdots = \frac{8}{\pi} - \frac{1}{3}$$

USACH
DMCC

**Pregunta 2**

Sea $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial dos veces diferenciable.

a) Pruebe que la aceleración se puede escribir como combinación lineal de los vectores unitarios T y N, o sea que

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\mathrm{T} + k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathrm{N}$$

donde $s = s(t)$ define la función longitud de arco.

b) Calcule las componentes tangencial y normal del vector aceleración correspondiente a $\vec{r}(t) = (t, \cos^2 t, sen^2 t)$.

**Solución:**

a) Sea $g$ reparmetrización de $f$ por longitud de arco, entonces

$$f(t) = g(s(t)) \Rightarrow f'(t) = g'(s)s' = \hat{T} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Derivando nuevamente respecto de $t$

$$f''(t) = g''(s)[S'(t)]^2 + g'(s)S''(t)$$

pero $\hat{T} = g'(s) \;\Rightarrow\; g''(s) = \hat{T}'' = \dfrac{d\hat{T}}{ds}$ y $\dfrac{d\hat{T}}{ds} = \left\|\dfrac{d\hat{T}}{ds}\right\| \cdot \hat{N} = \|g''(s)\| \cdot \hat{N}$

reemplazando y ordenando se llega a

$$a(t) = f''(t) = \frac{ds^2}{dt^2} \cdot \hat{T} + k \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{N}$$

b) $\vec{r}(t) = \left(t, \cos^2 t, \sin^2 t\right) \;\Rightarrow\; \vec{r}'(t) = \left(1, -\sin 2t, \sin 2t\right)$

Como $\dfrac{ds}{dt} = \left\|\vec{r}'(t)\right\| = \sqrt{1 + 2\sin^2(2t)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \dfrac{4\sin 2t \cos 2t}{\sqrt{1 + 2\sin^2(2t)}}$

Por lo tanto $a_T = \dfrac{2\sin(4t)}{\sqrt{1 + 2\sin^2(2t)}}$

$$\vec{r}''(t) = \left(0, -2\cos 2t, 2\cos(2t)\right)$$

y $\quad \therefore \quad \vec{\mathrm{r}}'(t)x\} \times \vec{r}''(t) = -2\cos(2t)\,\hat{j} - 2\cos(2t)\,\hat{k}$

$$\left\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right\| = \sqrt{8\cos^2(2t)} \quad \Rightarrow \quad K(t) = \frac{2\sqrt{2}\,|\cos(2t)|}{\left(1 + 2\sin^2(2t)\right)^{3/2}}$$

reemplazando y simplificando se tiene

$$a_N = \frac{2\sqrt{2}\,|\cos(2t)|}{\sqrt{\left(1 + 2\sin^2(2t)\right)}}$$

**Pregunta 3**

Un automovilista se desplaza por una carretera recta. En el instante $t = 0$ arriva a una rotonda la que recorre con el movimiento $f(t) = (a\cos t, asent, bt(2-t))$, $0 \le t \le 2$ . En el instante $t = 2$ sale de la rotonda y vuelve a continuar por una carretera recta

a) Calcule la curvatura máxima de la trayectoria, para $0 \le t \le 2$. ¿ en que punto ocurre?
b) Determine la torsión de la trayectoria para $0 \le t \le 2$. Haga un gráfico de la torsión en función de $t$ .

**Solución:**

a) $\quad f'(t) = \left(-a\sin t, a\cos t, 2b(1-t)\right) \quad$ y $\quad \left\|f'(t)\right\| = \sqrt{a^2 + 4b^2(1-t)^2}$

$$f''(t) = \left(-a\cos t, -a\sin t, -2b\right)$$

$$f'(t) \times f''(t) = \left(-2ab\cos t + 2ab(1-t)\sin t, -2ab\sin t - 2ab(1-t)\cos t, a^2\right)$$

$$\left\|f'(t) \times f''(t)\right\| = a\sqrt{a^2 + 4b^2\left(1 + (1-t)^2\right)}$$

Luego $\quad K(t) = \dfrac{a\sqrt{a^2 + 4b^2(1 + (1-t)^2)}}{(a^2 + 4b^2(1-t)^2)^{3/2}}$

Derivando esta expresión se tiene

$$K'(t) = \frac{-4ab^2(1-t)[-2a^2 - 12b^2 - 8b^2(1-t)^2]}{\left(a^2 + 4b^2(1-t)^2\right)^{5/2} \cdot \sqrt{a^2 + 4b^2\left(1 + (1-t)^2\right)}}$$

$$K'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

Por lo tanto: $t=1$ es único punto crítico punto crítico

$$K(0)=K(2)=\frac{a\sqrt{a^2+8b^2}}{\left(a^2+4b^2\right)^{3/2}} \quad , \qquad K(1)=\frac{a\sqrt{a^2+4b^2}}{a^3}$$

Se ve que $K(0)=K(2)<K(1)$.

Luego $K(1)$ es máximo y se alcanza en el punto $f(1)=\left(a\cos 1, a\sin 1, b\right)$

b) $\quad f''(t)=\left(a\sin t, -a\cos t, 0\right)$

$$\Rightarrow \qquad < f'(t)\times f''(t), f'''(t) > \; = f'(t)\times f''(t)\cdot f'''(t)=2a^2b(1-t)$$

$$\text{y} \qquad \tau(t)=\frac{< f'(t)\times f''(t), f'''(t) >}{\left\| < f'(t)\times f''(t) > \right\|^2}=\frac{2a^2b(1-t)}{a^2\left[a^2+4b^2\left(1+(1-t)^2\right)\right]}$$

Se tiene $\tau(0)=\dfrac{2b}{a^2+8b^2}$, $\quad \tau(2)=-\dfrac{2b}{a^2+8b^2}$ $\quad$ y $\quad \tau(1)=0$

$$\tau'(t)=0 \;\Rightarrow\; 4b^2(1-t)^2=a^2+4b^2 \;\Rightarrow\; (1-t)^2=\frac{a^2+4b^2}{4b^2}=1+\frac{a^2}{4b^2}>1$$

$$\therefore (1-t)^2>1$$

lo cual es imposible porque $1-t\le 1$ para $0\le t\le 2$. Por lo tanto $\tau$ no tiene punto crítico en $\left[0,2\right]$

El gráfico es del tipo