Calculo Avanzado
P.E.P#1 Segundo Semestre 2003.
Puntajes y Soluciones

1. Establecer la igualdad $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{w\, sen\, wx\, dw}{w^2+1} = e^{-x}$ si $x>0$ y de esto deducir el valor al cual converge $\displaystyle\int_0^\infty \frac{w^2}{(w^2+1)^2}dw$.

Solución: Se debe considerar la extensión impar de $f(x)=e^{-x}, x>0$;

$$B(w)=2\int_0^\infty e^{-v}\sin wv\,dv = 2\,e^{-v}\,\frac{(-sen\,wv - w\cos wv)_0^\infty}{1+w^2}=\frac{2w}{1+w^2} \quad \text{y} \quad A(w)=0$$

La integral de Fourier de $f(x)$ es $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{1+w^2}dw$. (pje.: 04).

Usando la identidad de Parseval se obtiene $\displaystyle\int_0^\infty \frac{w^2}{(1+w^2)^2}dw=\frac{\pi}{4}$ (pje. 02)

2. Sea C una curva determinada por intersección de los cilindros $x^2=1-y,\ z^2=y$

a) Parametrizar C de forma $r(t)=(x(t),y(t),z(t))\quad t\in I$;
Indicación: Notar que se cumple $x^2+z^2=1$

b) Obtener T,N,B,K y τ en $P=(0,1,1)$

Solución : a) Se puede parametrizar como $r(t)=(\cos t,\sin^2 t,\sin t)$, $t\in[0.2\pi]$
y con $t_1=\dfrac{\pi}{2}$; $\vec{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(0,1,1)$

b) $r'(t)=(-\sin t, 2\sin t\cos t,\cos t)$; $r'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1,0,0)$; $T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1,0,0)$

$r''(t)=(-\cos t, 2\cos 2t, -\sin t)$; $r''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(0,-2,-1)$;

$r'(t)\times r''(t)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(0,-1,2)$; $\left\|r'(t)\times r''(t)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right\|=\sqrt{5}$

$\Rightarrow\quad B\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(0,\dfrac{-1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$; y $\quad N\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(0,\dfrac{-2}{\sqrt5},\dfrac{-1}{\sqrt5}\right)$

$r'''(t)=(\sin t,-4\sin 2t,-\cos t)$; $r'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(1,0,0)$ $\quad(pje:05$

$\Rightarrow$ haciendo el correspondiente calculo que

$\tau\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, y $\quad K\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt5$ $\quad(pje:01)$

3. Sea : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}, & \text{si } \; y \neq 0 \quad xy \geq 0 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{si } \; y = 0 \end{cases}$

a) Estudiar continuidad de f en $\Re^2$

b) Calcular $f_x(x,y), f_y(x,y)$ si $y \neq 0$

c) Calcular $f_x(0,0), f_y(0,0)$

Solución:

a) 1) Si $y \neq 0$, $f(x,y)$ es continua, (cuociente de funciones continuas, con $xy \geq 0$; para $xy < 0$ no existe f y es discontinua)

2) Si; $y = 0$, $f(x,0) = \dfrac{x}{2}$;

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y} = \lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{1-\cos^2\sqrt{xy}}{y(1+\cos\sqrt{xy})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{\sin^2\sqrt{xy}}{y(1+\cos\sqrt{xy})} = \lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x\sin^2\sqrt{xy}}{xy(1+\cos\sqrt{xy})}$$

$$= \underset{(x,y)\to(x,0)}{lím} \; x\left(\frac{\sin\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos\sqrt{xy}} = \frac{x}{2} = f(x,0)$$

$$\Rightarrow \therefore \; f \;\; continua$$

(pje:02)

b)

$$f_x(x,y) = \frac{\sin\sqrt{xy}}{y2\sqrt{xy}}\, y = \frac{\sin\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}, \qquad x \neq 0;$$

$(y \neq 0)$

$$f_y(x,y) = \frac{xy\dfrac{\sin\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}} - (1-\cos\sqrt{xy})}{y^2}, \qquad x \neq 0$$

$(y \neq 0)$

$$f_x(0,y) = \underset{\Delta x\to 0}{lím} \frac{\dfrac{1-\cos\sqrt{\Delta xy}}{y} - 0}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{lím} \frac{1-\cos\sqrt{\Delta xy}}{\Delta x \cdot y} = \underset{\Delta x\to 0}{lím} \frac{\sin^2\sqrt{\Delta x \cdot y}}{\Delta x \cdot y(1+\cos\sqrt{xy})} = \frac{1}{2}$$

$$f_y(0,y) = \underset{\Delta y\to 0}{lím} \frac{\dfrac{1-\cos\sqrt{\Delta(y+\Delta y)\Delta x}}{y+\Delta y} - 0}{\Delta y} = \underset{\Delta y\to 0}{lím} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

$$f_x(0,0) = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\frac{\Delta x}{2} - 0}{\Delta x} = \frac{1}{2},\ f_y(0,0)\ \underset{\Delta y \to 0}{lím} \frac{\frac{1 - \cos\sqrt{0} \cdot \Delta y}{\Delta y} - 0}{\Delta y} = 0$$ (pje:04)

4. Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 - 8xy + z^2$ en la dirección de la normal a la superficie $x^2 + y^2 + z = 17$ en el punto (4,4,1).

Solución:

$$\nabla(x^2 + y^2 + z - 17) = (2x, 2y, 1)$$

$$\nabla(4,4,1) = (8,8,1) \Rightarrow \|(8,8,1)\| = \sqrt{129}$$

: $$\nabla f = (2x - 8y, -8x, 2z)$$

$$\nabla f(4,4,1 = (-24, -32, 2) \Rightarrow$$

$$D_{\vec{n}} f = \nabla f \cdot \frac{\nabla}{\|\nabla\|} = (-24,-32,2) \cdot \frac{(8,8,1)}{\sqrt{129}} = \frac{-446}{\sqrt{129}}$$

(pje:0.6)

Microsoft Editor de ecuaciones 3.0