U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2007

Pregunta 1

a) Demuestre que:

$$\frac{\pi\cos(ax)}{2a\sin(a\pi)} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\cos x}{1^2-a^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2-a^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2-a^2} - ...$$

donde $a \notin \mathbb{Z}$, a es cualquier número real.

b) Muestre que la igualdad se cumple para $x = \pi$ y $x = -\pi$, y deduzca que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a}\cot(\pi a)$$

Solución

Consideramos $f(x) = \cos(ax)$ definida en $-\pi < x < \pi$ como $f(x) = \cos(ax)$ define una función par, la serie de Fourier respectiva será una serie de Cosenos, por lo que $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ax)dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(ax)}{a}/_0^{\pi}$$

$$\Longrightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(a\pi)}{a}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)dx, n = 1, 2, 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n} + \frac{\sin(a-n)x}{a-n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right]$$

pero

$$\sin(a+n)\pi = \sin(a\pi)\cos(n\pi) + \cos(a\pi)\sin(n\pi) = \sin(a\pi)\cos(n\pi)$$

$$\sin(a-n)\pi = \sin(a\pi)\cos(n\pi) - \cos(a\pi)\sin(n\pi) = \sin(a\pi)\cos(n\pi)$$

entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sin(a\pi)\cos(n\pi)(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sin(a\pi)\cos(n\pi)(\frac{2a}{a^2-n^2})$$

finalmente

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sin(a\pi)(\frac{2a}{n^2-a^2}) = \frac{2a(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-a^2)}\sin(a\pi)$$

como $f(x) = \cos(ax)$ es continua en $-\pi < x < \pi$ se tiene

$$\cos(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\sin(a\pi)\frac{2a}{n^2-a^2}(-1)^{n+1}\cos(nx)$$

$$\cos(ax) = \frac{2a\sin(a\pi)}{2a^2\pi} + \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos(nx)$$

multiplicando esta última igualdad por $\frac{\pi}{2a\sin(a\pi)}$ se tiene:

$$\frac{\pi\cos(ax)}{2a\sin(a\pi)} = \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos(nx)$$

que es la igualdad pedida.

b) Puesto que:

$$\lim_{x\to\pi}\cos(ax) = \cos(ax)$$

y

$$\lim_{x\to-\pi}\cos(ax) = \cos(ax)$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\cos(ax) = \lim_{x\to-\pi^+}\cos(ax) = \cos(ax)$$

En $x = \pi$ la serie de Fourier converge a $\cos(a\pi)$.
De la parte (a) se tiene entonces que:

$$\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos(n\pi) = \frac{\pi\cos(a\pi)}{2a\sin(a\pi)} = \frac{\pi}{2a}\cot(a\pi)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}(-1)^n = \frac{\pi}{2a}\cot(a\pi) - \frac{1}{2a^2}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a}\cot(\pi a)$$

Pregunta 2
Se da una trayectoria regular $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$r(u) = (\frac{4au^2}{(1+u^2)^2}, \frac{2au(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{a(1-u^2)}{1+u^2}), a > 0$$

a) Pruebe que la función $\varphi : \mathbb{R} \to \,]-\pi, \pi[$ tal que $t = \varphi(u) = 2\arctan u$ define la reparametrización de r :

$$\bar{r} :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R} \text{ talque } \bar{r}(t) = (a\sin^2 t, a\sin(t)\cos(t), a\cos t)$$

b) Verifique que $\bar{r}(t)$ está contenida en una superficie esférica

c) Probar que los planos normales a la curva descrita por $\bar{r}(t)$ pasan por el centro de la esfera.

Solución

De $\varphi(u) = 2\arctan u$ se tiene que:
$\varphi'(u) = \frac{2}{1+u^2} > 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$, por lo tanto, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$
y como φ es continua, φ es biyectiva, y por tanto, invertible. Además

$$\varphi^{-1}(t) = \tan(\frac{t}{2})$$

$\varphi^{-1} :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en $]-\pi, \pi[$.

Por lo anterior, se puede definir $\bar{r}(t)$:

$$\bar{r}(t) = (r \circ \varphi^{-1})(t) = r(\varphi^{-1}(t)) = r(\tan(\frac{t}{2}))$$

$$\Longrightarrow \bar{r}(t) = (\frac{4a\tan^2(\frac{t}{2})}{(1+\tan^2(\frac{t}{2}))^2}, \frac{2a\tan(\frac{t}{2})(1-\tan^2(\frac{t}{2})}{(1+\tan^2(\frac{t}{2}))^2}, \frac{a(1-\tan^2(\frac{t}{2}))}{(1+\tan^2(\frac{t}{2}))}$$

Sustituyendo

$$\bar{r}(t) = (\frac{4a(\frac{1-\cos t}{1+\cos t})}{(\frac{2}{1+\cos t})^2}, \frac{2a\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}(\frac{2\cos t}{1+\cos t})}{(\frac{2}{1+\cos t})^2}, \frac{a(\frac{2\cos t}{1+\cos t})}{(\frac{2}{1+\cos t})})$$
$$= (a(1-\cos^2 t), a\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}, a\cos t)$$

Por lo tanto, la reparametrización la podemos definir por:

$$\bar{r}(t) = (a\sin^2 t, a\sin(t)\cos(t), a\cos t)$$

b)

$$x(t) = a\sin^2 t, y(t) = a\sin t\cos t, z(t) = a\cos t$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\sin^4 t + a^2\sin^2 t\cos^2 t + a^2\cos^2 t$$

$$= a^2\sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2\cos^2 t$$

$$= a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = a^2$$

$\therefore$ la curva está en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

c) Se $\bar{r}(t_0)$ un punto cualquiera de la curva.

La ecuación del plano normal es:

$$\pi_N : ((x, y, z) - \bar{r}(t_0)) \cdot \bar{r}'(t_0) = 0$$

y $(0, 0, 0) \in \pi_N$ si sólo si $\bar{r}(t_0) \cdot \bar{r}'(t_0) = 0$

$$\bar{r}(t_0) \cdot \bar{r}'(t_0) = (a \sin^2 t_0, a \sin(t_0)\cos(t_0), a \cos t_0) \cdot (2a \sin t_0 \cos t_0, a(\cos^2 t_0 - \sin^2 t_0), -a \sin t_0)$$

$$= 2a^2 \sin^3 t_0 \cos t_0 + a^2(\sin t_0 \cos^3 t_0 - \sin^3 t_0 \cos t_0) - a^2 \sin t_0 \cos t_0$$
$$= a^2 \sin^3 t_0 \cos t_0 + a^2 \sin t_0 \cos^3 t_0 - a^2 \sin t_0 \cos t_0$$
$$= a^2 \sin t_0 \cos t_0 - a^2 \sin t_0 \cos t_0$$
$$= 0$$

$$\therefore (0, 0, 0) \in \pi_N$$

Pregunta 3
Dada la ecuación de la trayectoria $r(t) = (a\cosh(\frac{t}{a}), t, 0)$

a) Encuentre la curvatura $K(t)$

b) Reparametrizar la curvatura en función de la longitud de arco

c) Encuentre la ecuación del plano osculador en $t = 0$

Solución

a)

$r(t) = (a\cosh(\frac{t}{a}), t, 0)$
Tomemos:

$$r'(t) = (\sinh(\frac{t}{a}), 1, 0)$$

$$\|r'(t)\| = (\sinh^2(\frac{t}{a}) + 1)^{\frac{1}{2}} = \cosh(\frac{t}{a})$$

$$r''(t) = (\frac{1}{a}\cosh(\frac{t}{a}), 0, 0)$$

$$r'(t) \times r''(t) = (0, 0, -\frac{1}{a}\cosh(\frac{t}{a}))$$

De este modo

$$K(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{a^2})\cosh^2(\frac{t}{a})}}{(\sinh^2(\frac{t}{a}) + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K(t) = \frac{1}{a\cosh^2(\frac{t}{a})}$$

b)

$$s(t) = \int_0^t \|r'(u)\|\,du = \int_0^t \cosh(\frac{u}{a})du = a\sinh(\frac{t}{a})$$

$$s = a\sinh(\frac{t}{a}) \implies t = \arcsin h(\frac{s}{a})$$

Además

$$s^2 + a^2 = a^2\sinh^2(\frac{t}{a}) + a^2$$

$$\frac{s^2 + a^2}{a^2} = \sinh^2(\frac{t}{a}) + 1 = \cosh^2(\frac{t}{a})$$

$$\therefore \cosh(\frac{t}{a}) = \frac{1}{a}\sqrt{s^2 + a^2}$$

$$\therefore r(s) = (\sqrt{s^2 + a^2}, a\arcsin h(\frac{s}{a}), 0)$$

c)

$$(r - r(0) \cdot \vec{B}(0) = 0, \text{ con } \vec{B}(0) = r'(0) \times r''(0)$$

$$\vec{B}(0) = (0, 0, -\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}(0, 0, -1)$$

$$[(x, y, z) - (a, 0, 0))] \cdot (0, 0, -1) = 0$$

$$\implies z = 0$$