UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. DE MATEMATICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACION
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN

PAUTA P.E.P # 1

CALCULO AVANZADO
30 de abril de 2004

1. Para $f(x) = e^{-[x]}, \quad 0 \leq x \leq 2$ obtener su serie de Fourier en cosenos, periódica de periodo 4.

2. Del resultado determinar convergencia de $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

Solución.-

$$f(x) = e^{-[x]} = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ e^{-1} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ e^{-2} & si \quad x = 2 \end{cases} \quad \text{con extensión par } E_p\big(f(x)\big) \text{ de } f(x).$$

se obtiene serie $a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} \qquad con \quad a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1dx + \int_1^2 e^{-1}dx\right)$

$$=> \qquad a_0 = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-1}\right) \;; \qquad a_n = \left(\int_0^1 1 \cdot \cos(\tfrac{n\pi x}{2})dx + \int_1^2 e^{-1} \cdot \cos(\tfrac{n\pi x}{2})dx\right)$$

$$=> \qquad a_n = \left.\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right|_0^1 + e^{-1}\left.\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right\|_1^2 = 2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + 2e^{-1}\frac{\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$$

$$= \quad 2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\left(1 - e^{-1}\right) \quad \text{y la serie es} \quad \frac{1+e^{-1}}{2} + \sum_{1}^{\infty} 2\left(1 - e^{-1}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

Convergencia en $x_0 = 2$ punto de discontinuidad con límites laterales e^{-1} se tiene convergencia

$$e^{-1} = \frac{1+e^{-1}}{2} + \sum_{1}^{\infty} 2\left(1-e^{-1}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos n\pi$$

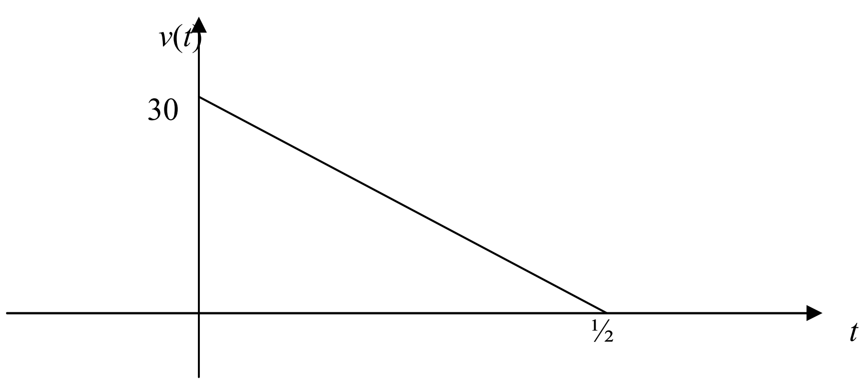
$$\Rightarrow \qquad \frac{e^{-1}-1}{2} = \sum_{1}^{\infty} 2\left(1-e^{-1}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

2.- Un automóvil demora ½ hora en ascender un cerro. Se supone que la rapidez es una función lineal del tiempo comenzando el ascenso a 30 km/h. Si el automóvil rinde 8km por litro, ¿cuánto combustible gasta en el ascenso?

Solución.-

con $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$, la rapidez $v(t) = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = A + tB$ (función lineal), tal que

$v\left(\frac{1}{2}\right) = A + \frac{B}{2} = 0,$ $\qquad v(0) = A = 30 \quad \Rightarrow \qquad v(t) = 30 - 60t$. Gráficamente se tiene:



La longitud de la trayectoria es

$$L = \int_0^{1/2} v(t)dt = \int_0^{1/2}(30-60t)dt = \frac{15}{2}km$$

entonces el combustible gastado es $\frac{15}{16}$ litros

3.- Sea C circunferencia definida por sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right|$$

a) Parametrizar C de la forma vectorial $r(t) = (x(t),\ \ y(t),\ \ z(t)),\ \ \ t \in [a, b]$ con $x(t) = a\ \cos\ t + b\ sen\ t,\ \ \ y(t) = c\ \cos\ t\ + d\ sen\ t,\ \ \ z(t) = e\ \cos\ t$, con *a, b, c, d, e* constantes por calcular

b) en el punto $P_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{182}}, -\frac{3}{\sqrt{182}}, -\frac{13}{\sqrt{182}}\right) \in C$ obtener *T, N, B.*

c) determinar $K(t)$ y $\tau(t)$ en cada punto de *C.*

Solución.-

a) Las componentes x(t) = a cos t + b sin t, y(t) = c cos t + d sin t, z(t) = e cos t

deben verificar el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} (a\cos t + b\sin t)^2 + (c\cos t + d\sin t)^2 + c^2\cos^2 t = 1 \\ 2a\cos t + 2b\sin t - 3c\cos t - 3d\sin t + e\cos t = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (a^2 + c^2 + e^2)\cos^2 t + (b^2 + d^2)\sin^2 t + (2ab + 2cd)\sin t\cos t = 1 \\ (2a - 3c + e)\cos t + (2b - 3d)\sin t = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + c^2 + e^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ 2ab + 2cd = 0 \\ 2a - 3c + e = 0 \\ 2b - 3d = 0 \end{array}\right|$$

⇨ $2b = 3d \rightarrow 3a = -2c \rightarrow b^2 + (\frac{2}{3})^2 b^2 = 1$,

$b = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow d = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$;

$a = -\frac{2}{3}c, \quad -\frac{4}{3}c - 3c + e = 0 \;\rightarrow\; \frac{4}{9}c^2 + c^2 + e^2 = 1 \rightarrow \frac{13}{3}c = e \rightarrow c = \pm\frac{3}{\sqrt{182}}$,

$e = \pm\frac{3}{\sqrt{182}}$;

así $a = \mp\frac{2}{\sqrt{182}}, \quad b = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}, \quad c = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}, \; c = \pm\frac{3}{\sqrt{182}}, \; d = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$

b) *Con* $t_0 = 0$ *se tiene de a),* $\vec{r}(0) = \left(\frac{2}{\sqrt{182}}, -\frac{3}{\sqrt{182}}, -\frac{13}{\sqrt{182}}\right) = Po$

y con $\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{182}}\cos t - \frac{3}{\sqrt{13}}\sin t, \quad -\frac{3}{\sqrt{182}}\cos t - \frac{2}{\sqrt{13}}\sin t, \quad -\frac{13}{\sqrt{182}}\cos t\right)$,

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{182}}\sin t - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t, \frac{3}{\sqrt{182}}\sin t - \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t, \frac{13}{\sqrt{182}}\sin t\right)\\
\vec{r}\,''(t) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{182}}\cos t + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin t, \frac{3}{\sqrt{182}}\cos t + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin t, \frac{13}{\sqrt{182}}\cos t\right)
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}\,'(0) &= \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right) = T(0);\\
\vec{r}\,''(0) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{182}}, \quad \frac{3}{\sqrt{182}}, \quad \frac{13}{\sqrt{182}}\right)
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow
\begin{aligned}
B(0) &= \left(-\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{182}}, \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{182}}, \quad -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{182}}\right)\\
N(0) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{182}}, \quad \frac{3}{\sqrt{182}}, \quad \frac{13}{\sqrt{182}}\right)
\end{aligned}$$

c) Como C es circunferencia de $r = 1 \Rightarrow k(t) = 1$

y siendo C curva plana $\tau(t) = 1 \quad \forall t$