Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Depto. de matemática y computación

Cálculo Avanzado
Pep 1
Soluciones y puntajes

Pregunta 1.-

Obtener la fórmula $\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \; sen 2nx$, si $x \in (0,\pi)$

Solución.- Se debe considerar la extensión impar de f(x) = cos x , al intervalo $[-\pi,\pi]$ para así obtener la serie de Fourier seno de f(x) = cos x. Tal serie es $\sum_1^{\infty} b_n \sin nx$, con

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(n-1)x}{2(n-1)} - \frac{\cos(n+1)x}{2(n+1)}\right]_0^{\pi}, \text{ si } n \neq 1,$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n-1)\pi}{2(n-1)} + \frac{\cos(n+1)\pi}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}\right), \; n \neq 1$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n-1)} + \frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\cdot\frac{n}{n^2-1}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 0.$$

La serie es $\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_1^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$, considerando cambio de índice; par)

Pregunta 2.-

Obtener la integral de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad |x| \le \pi, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \pi. \end{cases}$$

Estudiar convergencia en $x_0 = 0;\ x_1 = \pi$.

Solución.- Como f(x) es función par se tiene $B(w) = 0$

$$A(w) = 2\int_0^{\pi} \cos v \cos wv \, dv = 2\left(\frac{sin(1-w)v}{2(1-w)} + \frac{sin(1+w)v}{2(1+w)} \right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{\sin(1-w)\pi}{(1-w)} + \frac{\sin(1+w)\pi}{2(1+w)}$$

$$= \frac{\sin w\pi}{1-w} - \frac{\sin w\pi}{(1+w)} = \frac{2w\sin w\pi}{1-w^2}$$

La integral es $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{w\sin w\pi}{1-w^2} \cos wx \, dw$

Convergencia: considerar que en 0 $f(x)$ es continua, en π es discontinua. Se obtienen

respectivamente $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{w\sin w\pi}{1-w^2} \, dw = \frac{\pi}{2}$; $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{w\sin 2w\pi}{w^2-1} \, dw = \frac{\pi}{2}$.

Pregunta 3.-
En el instante $t = 0$, una casa es lanzada al espacio por causa de un tornado y sigue la trayectoria $r(t) = (e^{at}\cos t,\ \ e^{at} sent,\ \ be^{at} - b)$ con $a > 0,\ b > 0,\ t \geq 0$.

a) Calcular la distancia que recorre la casa hasta $t = \pi$.

b) En el instante t_1 con $t_1 \in [0,\pi]$, en el cual la trayectoria tiene curvatura máxima, un residente que dormía tranquilo es lanzado por una ventana hacia el exterior:

   i) ¿qué trayectoria sigue?
   ii) Determinar en que punto se encuentra la casa en el instante $t = \pi$.
   iii) Obtener la ecuación del plano osculador a la trayectoria de la casa en el instante $t = \pi$

Solución.- Se tiene $\vec{r}'(t) = (ae^{at}\cos t - e^{at}\sin t, ae^{at}\sin t + e^{at}\cos t, abe^{at})$

$$= e^{at}(a\cos t - \sin t, a\sin t + \cos t, ab)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = e^{at}\sqrt{a^2 + 1 + a^2b^2}$$

$$\Rightarrow l(c) = \int_0^{\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{a^2 + 1 + a^2b^2}\,\frac{1}{a}(e^{a\pi} - 1)$$

La curvatura máxima ocurre para t = 0 (casi obvio); en efecto

$$r''(t) = ae^{at}(a\cos t - \sin t, a\sin t + \cos t, ab) + e^{at}(-a\sin t - \cos t, a\cos t - \sin t, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t)\times r''(t) = e^{2at}(ab(s\,\text{int} - a\cos t), -ab(as\,\text{int} + \cos t), a^2 + 1)$$

y $\quad \|\vec{r}'(t)\times r''(t)\| = e^{2at}\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+1+a^2b^2}\quad$ y

$$K(t) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{e^{at}(a^2+1+a^2b^2)};\quad K(t) \text{ tiene un valor máximo en t = 0.}$$

Como el residente está con velocidad inicial 0, la trayectoria será

$$\vec{R}(\lambda) = \vec{r}(0) + \lambda\vec{r}'(0) = (1,0,0) + \lambda(a,1,ab)$$

En el instante $t = \pi$ la casa se encuentra en el punto $\vec{r}(\pi) = (-e^{a\pi}, 0, be^{a\pi} - b)$.

Plano osculador: $(\vec{R} - \vec{r}(\pi))\cdot\vec{r}'\times\vec{r}''(\pi) = 0$, con $(\vec{r}'\times\vec{r}'')(\pi) = e^{2\pi a}(a^2b, ab, a^2 + 1)$.