Calculo Avanzado
Solución P.E.P#1
25/04/2000

1- Sea f la función pulso unitario de periodo 2 definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\delta} & si \qquad -\delta\le x\le\delta \\ \\ 0 & si \quad -1\le x\langle\delta \quad ó \quad \delta\langle x\le 1\end{cases}$$

a) Obtener la serie de Fourier de f(x)

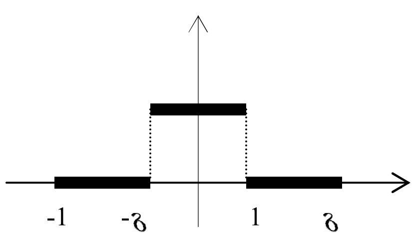
b) Si $a_n(\delta)$ es el coeficiente n-ésimo de la serie en a), calcular los limites:

$$\lim_{\delta\to0^+}(\lim_{n\to\infty} a_n(\delta)) \quad y \quad \lim_{n\to\infty}(\lim_{\delta\to0^+} a_n(\delta))$$

Solución:

Como f es par de periodo 2, $a_0=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\delta \frac{1}{2\delta}dx=\frac{1}{2}$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx=2\int_0^\delta\frac{1}{2\delta}\cos n\pi x dx=\frac{1}{\delta}\frac{sen n\pi\delta}{n\pi}=a_n(\delta)$$



$$Los \quad \lim ites \quad son: \lim_{\delta\to0^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\delta}\frac{senn\pi\delta}{n\pi}\right)=\lim_{\delta\to0^+}0=0$$

$$y \quad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta}\frac{senn\pi\delta}{n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

2- Utilizar la función $f(x)=xe^{-x} \; con \quad x\ge0$ para deducir que:

$$\int_0^\infty\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}\cos wxdw=\int_0^\infty\frac{2w}{(1+w^2)^2}senwxdw \qquad \forall x>0$$

Usar esta igualdad y convergencia para deducir que:

$$\int_0^\infty\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}dw=\int_0^\infty\frac{w^2}{(1+w^2)^2}dw$$

Solución:

2- $Se \quad considera \quad para \quad f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0 \quad sus \quad extensiones:$

$$a) \quad Par: \quad I_{fp} = \int_0^{\infty} A(w)\cos wx dw \quad con \quad A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} ve^{-v}\cos wv dv$$

$$b) \quad \operatorname{Im} par: \quad I_{fp} = \int_0^{\infty} B(w) senwx dw \quad con \quad B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} ve^{-v} senwdw$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{ve^{-v}(-\cos wv + wsenwv)}{1+w^2} - \frac{e^{-v}\left[(1-w^2)\cos wv - 2wsenwv\right]}{(1+w^2)^2}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$$

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{ve^{-v}(-senwv - w\cos wv)}{1+w^2} - \frac{e^{-v}\left[(1-w^2)senwv + 2w\cos wv\right]}{(1+w^2)^2}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{2w}{(1+w^2)^2}$$

$Como \quad \forall x \geq 0, \quad las \quad extenxiones \quad son \quad iguales \quad se \quad tiene:$

$$\int_0^{\infty} \frac{1-w^2}{\left(1+w^2\right)^2}\cos wx dw = \int_0^{\infty} \frac{2w}{\left(1+w^2\right)^2} senwx dw$$

$En \quad x_0 = 0, \quad punto \quad en \quad que \quad estas \quad extensiones \quad son \quad continuas \quad se \quad tiene \quad f(0) = 0 \quad y:$

$$\int_0^{\infty} \frac{1-w^2}{\left(1+w^2\right)^2} dw = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{dw}{\left(1+w^2\right)^2} = \int_0^{\infty} \frac{w^2}{\left(1+w^2\right)^2} dw$$

3- Para una partícula que se desplaza según trayectoria C dada por:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, sent, e^{-t} - \frac{1}{2}), \quad calcular \, en \quad el \quad punto \quad p_0 = (1,0,\frac{1}{2})$$

a) Los vectores $\vec{v}, \quad \vec{a}, \quad T, \quad B, \quad N$

b) Los escalares $K, \quad \tau, \quad a_T, \quad a_N$

Calcular además la longitud de C desde P_0 hasta el punto P_1 correspondiente a la intersección de C con el plano X-Y.

Solución:

3- De $\vec{r}(t) = \left(\cos t, sent, e^{-t} - \frac{1}{2}\right)$, $P_0 = \vec{r}(0) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ se tiene:

$$\vec{r}'(t) = \left(-sent, \cos t, -e^{-t}\right); \quad \left\|\vec{r}'(t)\right\| = v(t) = \sqrt{1+e^{-2t}}, \quad \vec{r}'(0) = (0,1,-1), \quad T(0) = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$a)$

$$\vec{r}''(t) = \left(-sent, \cos t, -e^{-t}\right), \quad \vec{r}''(0) = (-1,0,1) \quad \vec{r}' \times \vec{r}''(0) = (1,1,1), \quad B(0) = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{r}'''(t) = \left(sent, -\cos t, -e^{-t}\right), \quad N(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \quad \vec{v}(0) = (0,1,-1), \quad \vec{a}(0) = (-1,0,1)$$

$b)$

$$\mathrm{K}(0) = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^3} \quad \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''(0) = -2 \quad \tau(0) = -\frac{2}{3} \quad a_{\mathrm{T}}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad a_{\mathrm{N}}(0) = v^2 \mathrm{K} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^3}$$

$c)$

$$\mathrm{P}_1: \ de \quad e^{-t} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}_1 = (\cos \ln 2, sen \ln 2, 0)$$

$$y \quad L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{-2t}}\, dt \quad se \quad resuelve \quad con \quad cambio:$$

$$u = \sqrt{1+e^{-2t}} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{u^2-1}{u} dt \quad \Rightarrow \quad L = -\left[u + \int \frac{du}{u^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \left[-u - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du\right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \left[-u - \frac{1}{2} Ln \frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 0.8583$$