DIFERENCIABILIDAD

LIMITES Y CONTINUIDAD

GUIA PROBLEMAS PROPUESTOS

Prof. Miguel Martínez.

1. Describir el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x}-e^{\frac{x}{y}}$
b) $f(x,y)=\ln(1+xy)$
c) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2}$
d) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Use la definición de límite para verificar que:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x+y^2)=5$
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)}(xy+3y)=0$

3. Para cada una de las siguientes funciones calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ o bien probar que no existe.

a) $f(x,y)=\dfrac{y\sin x}{x}$ R: 0
b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+x^4}$ R: No
c) $f(x,y)=\dfrac{x+ye^{-x^2}}{1+y^2}$ R: 0
d) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ R: No
e) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ R: No
f) $f(x,y)=\dfrac{x}{|x|+|y|}$ R: No
g) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ R: 0

4. Pruebe que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ no existe. ¿ Qué puede decir de los correspondientes límites iterados?

5.Sea $f(x,y)=x+y\,sen\frac{1}{x}, x\neq 0$ .Determine la existencia de $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} f(x,y)$ y los correspondientes límites iterados.

R: Del hecho que $|f(x,y)|\leq|x|+|y|$ se deduce $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} f(x,y)=0$, $\underset{x\to 0}{lím}\,\underset{y\to 0}{lím} f(x,y)=0$, $\underset{y\to 0}{lím}\,\underset{x\to 0}{lím} f(x,y)=0$ no existe.

6.Determine $\underset{x\to x_0}{lím}\,\underset{y\to y_0}{lím} f(x,y)$, $\underset{y\to y_0}{lím}\,\underset{x\to x_0}{lím} f(x,y)$ y $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím}\,\underset{}{lím} f(x,y)$

a) $f(x,y)=x^3+xy^2, (x_0,y_0)=(-1,3)$

b) $f(x,y)=x\sin xy, (x_0,y_0)=(1,\pi/2)$

c) $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$ $(x_0,y_0)=(0,0)$

R: a) Todos igual $a \ -10$
c) Todos igual $a \ \ 0$

7. Para la función $f(x,y)=(x,y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, demuestre que los límites iterados no existen, pero que $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} f(x,y)$, si existe.

8. Para $f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, determinar si f es continua en $(0,0)$

R: No

9. Determina el conjunto de puntos para los que f es continua.

a) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+2x+y^2}$ R: $\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\neq 1\}$

b) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ R: $\Re^2-\{(0,0)\}$

c) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ R: $\{(x,y)\,|\,y\neq\pm x\}$

d) $f(x,y)=sen\,x+sen\,y$ R: $\Re^2$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+3y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 \quad , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ R: $\Re^2-\{(0,0)\}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-y}{x^4+5y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ R: $\Re^2-\{(0,0)\}$

g) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ R: $\Re^2$

10. Dado $f(x,y)=\dfrac{\sin x\cos^2 y+\frac{1}{2}\cos x\sin 2y}{x+y}$ si $x+y\neq 0$. Encuentre una extensión g de f tal que g sea continua en $\Re^2$.

11. Para

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Calcular:

a) $f_x(0,0), f_y(0,0), f_x(x,y), f_y(x,y)$
b) $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$

12. En cada caso se da una función $f(x,y)$ que no está definida en $(0,0)$ ¿ Es posible definir $f(0,0)$ de tal modo que f sea continua en $(0,0)$**.**

a) $f(x,y)=\dfrac{\tan(x,y)}{x+y}$ R: Si, 1

b) $g(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ R: No

c) $h(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ R: No

d) $f(x,y)=\dfrac{5x^2y^2}{x^3+y^6}$ R: No

e) $f(x,y)=\dfrac{3x^2y^3}{x^4+y^4}$ R: Si, 0

13. Halle un número $\delta>0$ tal que si $x^2+y^2<0$, entonces.
$\left|x^2+y^2+3xy+180xy^5\right|<10^{-4}$

14. Sea $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$.¿ Dónde está definida esta función?. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ no existe.

Sugerencia. Acérquese al origen por los ejes coordenados y por la recta $x=y=z$?.