INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

GUIA PROBLEMAS PROPUESTOS

Prof. Miguel Martínez Concha

Integrales Dobles

1.-Obténgase el volumen de la región R acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$. R. $8\pi \ u^3$.

2.- En cada ejercicio se da una expresión en integrales . Haga un dibujo que muestre la región de integración R y escriba la integral iterada correspondiente si se intercambia el orden de integración

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_0^{0.5(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} f(x,y)\,dydx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx + \int_1^{10} \int_0^{(10-x)/9} f(x,y)\,dydx$

d) $\displaystyle\int_a^b \int_c^x f(x,y)\,dydx \qquad (c < a)$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} f(x,y)\,dxdy$

R. b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2(1-y^2)^{1/2}}^{2(1+y^2)^{1/2}} f(x,y)\,dxdy$, c) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{10-9y} f(x,y)\,dxdy$

d) $\displaystyle\int_c^a \int_a^b f(x,y)\,dxdy + \int_a^b \int_y^b f(x,y)\,dxdy$, e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} f(x,y)\,dydx$

3.- Calcular $\displaystyle\iint_R x^2 y^3\,dA$, donde R es la región plana limitada por el rectángulo de vértices en A=(0,0), B=(3,0) , C=(3,2) , D=(0,2). R. 36

4.- Calcular $\iint_R (2x+y)^3\,dxdy$, donde R es la región plana limitada por el triángulo de vértices en A=(1,1), B=(4,0) , C=(3,5) . R. 15862/6

5.- Calcular $\iint_R e^x e^{2y}\,dydx$, donde R es la región limitada por el cuadrado $|x|+|y|=1$

R. $\left(\frac{2}{3}\right)(e^2-e-e^{-1}+e^{-2})$

6.- Calcule la integral doble de la función $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x^2-y)$, sobre el rectángulo $[-1,1]\times[0,1]$ R. -2/3

7.- Calcula $\int_0^1\int_y^1 ye^{-x^3}\,dxdy$ R. $\frac{e-1}{6e}$

8.- Evalúe la integral doble $\iint_R f(x,y)dA$, para la función $f(x,y)$ y R dada en cada caso.

a) $f(x,y)=x+y$, R es la región triangular acotada por *x = 2y, x=6 , y= 0.*
b) $f(x,y)=x^2+y^2$, R es la región acotada por x=0, $y=x$, $y=e^{-x}$.
c) $f(x,y)=x^2y^2$, R_ es la región acotada por las hipérbolas equiláteras $xy=1$, $xy=2$ y las rectas $y=\frac{x}{2}$, $y=3x$. Indicación.- haga un adecuado cambio de variables (grafique la región).
d) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$, R es la región acotada por el circulo $x^2+y^2=a^2$ y los ejes coordenados en el primer cuadrante. Ind. use coordenadas polares
e) $f(x,y)=\sqrt{a-x^2-y^2}$, $R=\{(x,y):x^2+y^2\le a\}$. Ind. use coordenadas polares.

R. a) 45 , b) $\frac{1}{9}(19-18a-18a^2-10a^3-3a^4)$, donde $a\approx 0,567143$ es la raíz real de la ecuación $e^{-x}=x$, c) $\frac{7}{6}\ln 6$, d) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$, e) $\frac{2\pi}{3}a^3$

9.- La formula para calcular el área usando integral doble en coordenadas polares es

$$A=\iint \rho d\rho d\theta$$

Encuentre el área dentro de la cardioide $\rho=a(1+sen\theta)$, fuera del circulo $\rho=a$

R. $A=\int_0^{\pi}\int_a^{a(1+sen\theta)} \rho d\rho d\theta = \frac{a^2}{4}(8+\pi)$

10.- Encontrar el volumen común de la esfera $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ y el cilindro $x^2+y^2 \le ax$.

11.- Encontrar el volumen bajo el paraboloide $x^2+y^2=az$, arriba del plano XY y dentro del cilindro $x^2+y^2=2ax$

Integrales triples

12.- Evaluar $\iiint\limits_R f(x,y,z)dV$, para la función $f(x,y,z)$ y R dada en cada caso.

a) $f(x,y,z)=x^2$, $R=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$
b) $f(x,y,z)=2x+3y+z$, $R=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$
c) $f(x,y,z)=x^2\cos z$, R es la región acotada por los planos $z=0, z=\pi, y=0$, $y=1, x=0$ y $x+y=1$
d) $f(x,y,z)=xyz$, donde R es la región determinada por las condiciones $x\ge 0$ $y\ge 0, z\ge 0$ y $x^2+y^2+z^2\le 1$.

R. a) $\frac{1}{3}$, b) 7 , c) 0 , d) 1/48.

13.- Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)dzdydx$$

obtener las otras cinco formas equivalentes de plantear esta integral iterada.

14.- Use coordenada cilíndricas para evaluar la integral triple

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2$, $\Omega=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, -1\le z\le 1\right\}$

b) $f(x,y,z)=z\sqrt{1-x^2-y^2}$, $\Omega=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, z\le 2x^2+2y^2\right\}$

R. a) $\Omega=\left\{(r,\theta,z): 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, -1\le z\le 1\right\}$, $\frac{\pi}{4}$.

b) $\Omega=\left\{(r,\theta,z): 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 2r^2\right\}$, $\frac{32\pi}{105}$

15.- Use coordenada esféricas para evaluar la integral triple

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0\right\}$

b) $f(x,y,z) = x + 2z$, $\Omega = \left\{(x,y,z) : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, z \le 0\right\}$

R. a) $\Omega = \left\{(r,\theta,\phi) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $\dfrac{8\pi}{15}$

b) $\Omega = \left\{(r,\theta,\phi) : 1 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi, \dfrac{\pi}{2} \le \phi \le \pi\right\}$, -40 π

16.- La masa de un sólido de densidad ρ es $m = \iiint_{S} \rho(x,y,z)\,dxdydz$

a) Hallar la masa de la caja $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ que tiene densidad de masa $\rho(x,y,z) = (1+x)e^{z}y$

b) Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

R. a) $\dfrac{15}{4}e(e-1)$