GUIA DE EJERCICIOS N° 1
De series de Fourier

A.- Obtener serie de Fourier de y = $f(x)$, x ∈ [- π, π], periódica de periodo 2π si:

1.- $f(x) = x; (\sum_{1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} SENnx \equiv 2(SENx - \frac{SEN2x}{2} + \frac{SEN2x}{2} + ...,)$

2.- $f(x) = x^2; (\frac{\pi^2}{3} \sum_{1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} COSnx \equiv \frac{\pi^2}{3} - 4(\frac{COSx}{1^2} - \frac{COS\,2x}{2^2} \pm ......,)$

3.- $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi \le x < 0 \\ 1, 0 \le x \le \pi \end{cases}$; $\sum_{1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{SEN\,(2N-1)X}{2N-1} \equiv \frac{4}{\pi}(SENx + \frac{SEN\,3x}{3} + ...,)$

4.- $f(x) = e^{x}; \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n}{1 + n^2} (COSnx - nSENnx) \right)$

5.- $f(x) = |X|; \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{COS\,(2n-1)x}{(2n-1)^2} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\frac{COSx}{1^2} + \frac{COS\,3x}{3^2} + ...) \right)$

6.- $f(x) = \pi^2 - x^2; \left(\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} COSnx \right)$

7.- $f(x) = e^{|X|}; \left(\frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1 + n^2} COSnx \right)$

8.- $f(x)=\begin{cases}0,-\pi \leq x \leq 0\\ x,0 \leq x \leq \pi\end{cases}$; $\left(\frac{\pi}{4}+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\frac{(-1)^{n}-1}{n^{2}}COSnx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}SENnx\right)\right)$

9.- $f(x)=$ π - x , $\left(\pi+\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n}}{n}SENnx\right)$

B.- Obtener serie de Fourier de y = $f(x)$, x ∈ [-p, p], periódica de periodo 2p si:

1.- $f(x)=$ 1 - | x | ; $\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^{2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{COS(2n-1)\pi x}{(2n-1)^{2}}\right)$ [-1,1]

2.- $f(x)=\begin{cases}0,-1 \leq x \leq 0\\ 1,0 < x \leq 1\end{cases}$; $\left(\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{n\pi}SENn\ \pi x\right)$

3.- $f(x)=\begin{cases}1,-2 \leq x < 0\\ x,0 \leq x \leq 2\end{cases}$; $\left(1-\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^{2}}\frac{COS(2n+1)\frac{\pi x}{2}}{(2n+1)^{2}},\frac{1}{\pi}\frac{SENn\ \pi x}{n}\right)\right)$

4.- $f(x)=e^{-x},-1 \leq x \leq 1;\left(\frac{e-1}{e}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(e-e^{-1})}{1+n^{2}\pi^{2}}(COSn\pi x+n\pi SEN\pi x\right)$

5.-

$$f(x)=\begin{cases}0, -\frac{1}{2}\le x<0\\ e^{X}, 0\le x\le\frac{1}{2}\end{cases};\left(e^{\frac{1}{2}}-1+\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}}(-1)^{n}-1}{\frac{1}{4}+n^{2}\pi^{2}}\left(\frac{1}{2}COS\,2n\pi x-n\pi SEN\,2n\pi x\right)\right)$$

6.- $f(x)=$ x, x$\in$[-1,1] , $\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{SEN\pi x}{1}-\frac{SEN2\pi x}{2}+\frac{SEN3\pi x}{3}-+\ldots\ldots\right)\right)$

7.- $f(x)=\begin{cases}-1,-1\le x<0\\ 1,0\le x\le 1\end{cases}$; $\left(\frac{4}{\pi}\left(SEN\;\pi x+\frac{SEN\;3\pi x}{3}+\frac{SEN\;5\pi x}{5}+\ldots\ldots\right)\right)$

Nota: Graficar cada ejercicio.

<u>Cálculo Avanzado</u>

Guía de Ejercicios n°2

A.- (De extensiones par e impar)

Para y = $f(x)$ definida en [o , p] obtener sus series de Fourier coseno y seno, periodica de periodo 2p.

1.- $f(x) = \pi - x$, $x \in [o, \pi]$

2.- $f(x) = e^{-x}$, $x \in [o, \pi]$

3.- $f(x) = e^{x}$, $x \in [o, 1]$

4.- $f(x) = x^2 - x$, $x \in [o, 1]$

B.- Obtener la serie de Fourier de : (intervalo [-p, p] ;

1.- $f(x) = \begin{cases} 0, si\ -1 \le x < 0 \\ 1, si\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

2.- $f(x) = \begin{cases} 1, si\ -2 \le x < 0 \\ x, si\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

3.- $f(x) = \begin{cases} 1, si\ -\pi \le x < 0 \\ x^2, si\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$

4.- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, si\ -\pi \le x \le -\frac{1}{2} \\ 0, si\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, si\ \frac{1}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

5.- $f(x) = \begin{cases} a, si -\pi \leq x < 0 \\ a, b. ctes. \\ b, si 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$

6.- $f(x) = \begin{cases} ax, si -\pi \leq x < 0 \\ a, b. ctes. \\ bx, si 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

C.- Obtener serie de Fourier de $f(x)$, x ∈ [a , b] ; (periodo b-a)

1.- $f(x) =$ x , x ∈ [0 , 2] ;

2.- $f(x) = \begin{cases} x, si 0 \leq x < 1 \\ 1 - x, si 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

3.- $f(x) = x^2$, x ∈ [1 , 2] ;

4.- $f(x) = |cos x|$, x ∈ [0,2π]

D.- Aplicar el teorema de convergencia puntual a las series obtenidas en los ejercicios precedentes. (Guías n°1 y n° 2)

E.- Para $f(x)$ periódica de periodo 2p, x ∈ [-p , p] rige la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx = 2a_\circ^2 + \sum_{1}^{\infty}(an^2 + bn^2)$$, para la

serie de $f(x)$, $a_\circ + \sum_{1}^{\infty}\left(an\frac{COSn \ \pi x}{p} + bnSEN\frac{n \pi x}{p}\right)$

Verificar esta identidad para ejercicios precedentes.

Calculo Avanzado
Guía de Ejercicio n°3
(de integrales de Fourier)

A.- Obtener integral de Fourier de funciones.

1.- $f(x) = \begin{cases} 1, si|X| \leq 1 \\ 0, si|X| > 1 \end{cases}$, Deducir la convergencia

$$\int_0^{\infty} \frac{senwdw}{w} = \frac{\pi}{2}$$

2.- $f(x) = \begin{cases} 0, siX < 0 \\ \frac{1}{2}, siX = 0 \\ e^{-X}, siX > 0 \end{cases}$, Deducir la convergencia

$$\int_0^{\infty} \frac{dw}{1 + w^2} = \frac{\pi}{2}$$

3.- $f(x) = \begin{cases} 0, siX < -2 \\ X, si -2 < X < 1 \\ 2 - X, si1 < X < 2 \end{cases}$

4.- $f(x) = \begin{cases} 0, siX > 2 \\ X, si|X| \leq 1 \\ 0, si|X| > 2 \end{cases}$

B.- Obtener integral de Fourier de medio rango si:

1.- Para $f(x) = e^{-kx}$, k cte. , k > 0, obtener:

a) integral de cosenos y estudiar convergencia en $X_\circ = 0$;
b) Integral de senos.

2.- Para $f(x) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < a \\ 0, & si \quad x > a \end{cases}$, integral de cosenos

3.- Para $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, si 0 < X < \pi \\ 0, si X > \pi \end{cases}$, integral de senos

4.- Para $f(x) = \begin{cases} X, si 0 < X < 1 \\ 2 - X, si 1 < X < 2 \\ 0, si X > 2 \end{cases}$, integral de cosenos

C.- 1.- Deducir la igualdad $\left\{ \frac{1}{2} COSx, |X| > \frac{\pi}{2} \right. = \begin{cases} \frac{1}{2} COSx & |x| > \frac{\pi}{2} \\ 0, |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

2.-Como 1.- para $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{SENw\pi}{1 - w^2} SENwxdx = \begin{cases} 0, siX \geq \pi \\ \frac{1}{2}, SENx & ,0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

D.- Para $f(x) = \begin{cases} COSx, si 0 < x \leq \pi \\ 0, siX > \pi \end{cases}$

a) Obtener integral de Fourier coseno; estudiar convergencia en $X_\circ = 0$

b) Obtener integral de Fourier seno;

c) De a) y b) deducir la igualdad.

$$\int_0^\infty \frac{w \operatorname{sen} \pi w}{1 - w^2} \cos wxdw = \int_{01}^\infty \frac{w(1 + \cos \pi w)}{w^2 - 1} \operatorname{sen} wxdw \quad , \forall x > 0$$

Calculo Avanzado
Guía de ejercicios n°4

1.- Para, $\vec{f}:[a,b]\to \Re^n$, $\vec{g}:[a,b]\to\Re^n$ derivables, probar:

a) $(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})' = \alpha\vec{f}\,' + \beta\vec{g}\,'$ α,β ctes.;

b) $(\alpha(t)+\vec{f}(t))' = (\alpha'(t)+\vec{f}\,'(t)+\alpha(t)\vec{f}\,'(t)$,si $\alpha=\alpha(t)$ escalar ;

c) $(\vec{f}\times\vec{g})' = \vec{f}\,'\times\vec{g}+\vec{f}\times\vec{g}\,'$ en t ; n = 3

d) $(\vec{f}\cdot\vec{g})' = \vec{f}\,'\cdot\vec{g}+\vec{f}\cdot\vec{g}\,'$ en t ;

2.- Para $(\vec{f}(t) = (e^{2t}, t^2, e^{-2t})$ obtener :

a) $\vec{f}\,'(t)$, b) $\vec{f}\,''(t)$, c) $\left\|\vec{f}\,''(t)\right\|$; d) $\left\|\vec{f}(t)\right\|$; e) $\left\|\vec{f}(t)\right\|'$

3.- Sea $\vec{f}(t) = \alpha(t)\hat{\ell}(t)$ con $\alpha=\alpha(t)$ escalar variable y $\hat{\ell}=\hat{\ell}(t)$ vector de módulo 1 derivables. Calcular $\vec{f}\,'(t)$

a) Si $\vec{f}(t)$ varía solo en módulo; b) si $\vec{f}(t)$ varía solo en dirección.

4.- a) Sea $\vec{f}=\vec{f}(t)$ de modulo constante; probar que $\vec{f}(t)\bullet\vec{f}\,'(t)=0$ y por tanto $\vec{f}\,'(t)$ y $\vec{f}(t)$ son perpendiculares;

b) Sea $\vec{f}=\vec{f}(t)$ de dirección constante ; probar que $\vec{f}(t)\bullet\vec{f}\,'(t)=\vec{0}$ y por tanto $\vec{f}\,'(t)$ y $\vec{f}(t)$ son paralelas.

5.-Para las curvas dadas por su ecuación vectorial paramétrica $\vec{r}=\vec{r}(t), t\in[a,b]$, eliminar t y obtener su respectiva ecuación cartesiana:

a) $\vec{r}(t)=(t,t^3), t\in[0,1]$;

b) $\vec{r}(t) = (aCOSt, bSENt), t \in [0,2\pi]$

c) $\vec{r}(t) = (COSt, SEN^2 t), t \in [0,2\pi]$

d) $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0,1]$

e) $\vec{r}(t) = (e^t COSt, e^t SENt^2, e^t), t \in [0,2\pi]$

6.-Parametrizar en la forma $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), 2(t)), t \in [a,b]$ las curvas C definidas por:

a) línea recta por puntos A = (1,2,-3), B = (2,2,2);

b) x+y+z = 1
   y-z = 0

c) $\begin{matrix} x^2 + y^2 = 9 \\ z - 1 = 0 \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} y = 3x^3 \\ z = 0 \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} x^2 - ax + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{matrix}$

7.- Obtener los vectores unitarios T, N, B $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ para C:

a) $\vec{r}(t) = (1+t, 3-t, 4+2t); t_\circ = 1$;

b) $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{t^3}{3}); t_\circ = 1$

c) $\vec{r}(t) = (t^3/3, 2t, 2/t); t_\circ = 2$

d) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t); t_\circ = 0$

e) $\vec{r}(t) = (2\cosh\frac{t}{2}, 2\operatorname{senh}\frac{t}{2}, 2t); t_\circ = 0$

8.- Calcular la longitud $e(c)$ de curva C :

a) $\vec{r}(t) = (t, t^2); t \in [0,1]$;

b) y = COS hx ; x∈ [0,1];

c) $y = x^{3/2}, z = 0$ desde (0,0,0) a (4,8,0);

d) $\vec{r}(t) = (aCOS^3 t, aSEN^3 t), t \in [0,2\pi]$;

e) $\vec{r}(t) = (t, \frac{3}{2}, t^2, \frac{3}{2}t^3), t \in [0,2];$

f) $\vec{r}(t) = (tCOSt, tSENt, t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

g) $\vec{r}(t) = (5t, 4t^2, 3t^2), t \in [0,2];$

h) $\vec{r}(t) = (t, \ln(SECt + TGt), \ln SECt), t \in [0, \frac{\pi}{4}];$

i) $\vec{r}(t) = (t, t, t^2), t \in [1,2];$

j) $\vec{r}(t) = (t+1, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} + 7, \frac{1}{2}t^2), t \in [1,2];$

9.-Parametrizar en la forma $\vec{r} = \vec{r}(s), s \in [0, \ell]$, con s longitud de arco las curvas:

a) $\vec{r}(t) = (e^{l}, e^{-t}, \sqrt{2}t);$

b) $9y^2 - 4x^3, x \geq 0;$

c) $\vec{r}(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t, e^t);$

d) $\vec{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$

10.-Con la definición correspondiente probar que C es rectificable:

a) $\vec{r}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t), t \in [0, \frac{4}{2}];$

b) $\vec{r}(t) = (t^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{t}, t), t \in [0,1], \vec{r}(0) = (0,0) si \alpha > 1, cte.$

11.-Obtener T, N, B, K y T en cada punto de C si C es :

a) $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3);$

b) $\vec{r}(t) = (t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3});$

c) $\vec{r}(t) = (t - SENt, 1 - COSt, t);$

d) $\vec{r}(t) = (t, COSht, SENht);$

e) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t);$

f) $\vec{r}(t) = (aCOSt, aSENt, aCOSt);$

g) $\vec{r}(s) = (arcTgs, \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(1+s^2), s - arcTgs);$

12.-Calcular $k(t_0)$ (curvatura), $T(t_0)$ (torsión) para C:

a) $\vec{r}(t) = (2SENt, 3, 2COSt), t_0 = \frac{\pi}{4}$;

b) $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{t^3}{3}), t_0 = 0$;

c) $\vec{r}(t) = (e^t COSt, e^t SENt, e^t), t_0 = 0$;

d) $\vec{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, t^2), t_0 = 1$

13.-Determinar las ecuaciones de recta tangente y de plano oscilador a las curvas C dada por:

a) $\vec{r}(t) = (t^2, 2t, t^3 - 1)$ en $P_0 = (1,2,0)$;

b) $\vec{r}(t) = (tSENt, tCOSt, t)$ en $P_0 = (0,0,0)$;

c) $\vec{r}(t) = (t - SENt, 1 - COSt, 4SEN\frac{t}{2})$ en $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$;

d) $\begin{matrix} x = y^2 \\ z = x^2 \end{matrix}$ en $P_0 = (1,1,1)$;

e) $\begin{matrix} x = y \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{matrix}$ en $P_0 = (1,1,\sqrt{2})$;

f) $\begin{matrix} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{matrix}$ en $P_0 = (1,3,4)$;

g) $\begin{matrix} x^2 + 2y^2 = 6 \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \end{matrix}$ en $P_0 = (-2,1,6)$

14.-Si en instante t el vector posición de una partícula en movimiento es dada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ obtener velocidad, rapidez, aceleración y las componentes tangencial y normal de la aceleración:

a) $\vec{r}(t) = (1, -4t^2, 3t^2)$;

c) $\vec{r}(t) = (t^2, 2t, t^3 - 1)$;

d) $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$;

e) $\vec{r}(t) = (t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3)$ en $t_0 = 2$;

f) $\vec{r}(t) = (\frac{t^3}{3}, 2t, \frac{2}{t})$; en $t_0 = 1$

15.-Para la curva definida por la intersección del plano z = 2y con el cilindro elíptico $2x^2 + 3y^2 = 1$.Calcular la curvatura $K(P_0)$ si $P_0 = (o, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

16.-Determinar en que punto la curva C dada por $\vec{r}(t) = (2+t, 1+t^2, 3t+t^2)$ tiene tiene curvatura máxima.