GUÍA DE DERIVADAS PARCIALES (1)
(Continuación)

1. Si $f:\Re^n \to \Re$ es tal que $f(x)=c$. Pruebe que $df=0$

2. Demuestre que las siguientes funciones son diferenciables en cualquier punto (x,y) de $\Re^2$ y calcule el valor de la diferencial en (x,y) y $h=(h_1,h_2)$, y las derivadas parciales.

   a) $f(x,y)=x+y$ $\quad R:\ df=h_1+h_2,\quad 1,\ 1$

   b) $f(x,y)=x^2+y^2$ $\quad R:\ df=2xh_1+2yh_2,\quad 2x,\ 2y$

   c) $f(x,y)=x^2y+x^3$ $\quad R: df=(2xy+3x^2)h_1+x^2h_2, 2xy+3x^2, x$

3. Demuestre que la función definida por $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ es continua en el origen, pero no es diferenciable allí.

   Indicación: Use definición para calcular $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$. Pruebe que no existen.

4. Si $f,g:\Re^n \to \Re$ son diferenciables en $x\in\Re^n$. Prueba que $f+g$ es diferenciable en $x\in\Re^n$.

5. Si $f:\Re^3 \to \Re$ y $g:\Re^2 \to \Re$ diferenciables tal que $g(x,y)=f(x-y,x+y,2x)$.

   Calcular g_x, y g_y en términos de f_u, f_v, f_w.

   Resp: $g_x=f_u+f_v+2f_w$; $g_y=-f_u+f_v$

6. Sea $f:\Re^2 \to \Re$ una función diferenciable y sea $x=s\cos\alpha - t\sin\alpha$, $y=s\sin\alpha+t\cos\alpha$, donde α es una constante. Calcular $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$.

   Resp: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

7. Sean $f,g:\Re \to \Re$ funciones para las cuales f'' y g'' existen. Si $h(x,y)=f(xg(y))$ calcular todas las segundas derivadas parciales de h.

Resp:

$$h_{xx} = f''(xg(y))\left[g(y)\right]^2$$
$$h_{xy} = f'(xg(y))g'(y) + xf''(xg(y))g'(y)g(y)$$
$$h_{yy} = x^2 f''(xg(y))\left[g'(y)\right]^2 + xf'(xg(y))g''(y)$$

8. Si $u = x^3 f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$ es diferenciable . Verificar que:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u \text{ .}$$

9. Si $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$. Sea $z = f(x,y)$ diferenciable . Obtener que:

i) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r}$

10. Sea $u(x,y) = e^{-2x-\frac{1}{2}y}\cdot g(y-5x)$, con g función de clase C^2 (Con derivadas parciales de orden 2 continuas). Verificar que u satisface la ecuación:

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 6u_x + 3u_y + \frac{27}{4}u = 0$$

11. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$ en (1,2) en la dirección de la tangente a $y = x^3$ en (1,1)

.Resp: $R: -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

12. Calcule la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^3 + 4xy + z^2 - 2yz$ en (1,2,1) en la dirección de la tangente a la curva descrita por $r(t) = (t, 2t^2, t^3)$

13. Encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si:

a) $x^3 + y^3 + z^3 = 3axyz$

b) $xe^z = y\sin z$

Resp: a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^2 - ayz}{axy - z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y^2 - axz}{axy - z^2}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x(\cot z - 1)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{y(1 - \cot z)}$

14. Si u es función implícita de x, y y z en la primera ecuación y z es función implícita de x e y en la segunda ecuación. Considerando u en consecuencia como función de x e y , encontrar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

a) $x^2 + y^3 + z^4 + u^5 = 1$, $x + y^2 + z^3 = 1$

b) $u = x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1$, $z = x^2 + y^2 + z^2$

c) $u = x + y + z + e^u = 1$, $z = x + y + \sin z$

Resp: a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{4z - 6x}{15u^4}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{8yz - 9y^2}{15u^4}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{3x^2 - 6x^2 z + 6xz^2}{(1 - 2z)(1 - 3u^2)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{3y^2 - 6y^2 z + 6yz^2}{(1 - 2z)(1 - 3u^2)}$

c) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1 - \cos z}{(1 - \cos z)(1 - e^u)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2 - \cos z}{(1 - \cos z)(1 - e^u)}$

15. La ecuación del plano tangente a la superficie S dada por $F(x, y, z) = c$ en el punto $P_0 = (a, b, c)$ es

$$\nabla F(P_0) \cdot (P - P_0) = 0 \quad \text{o}$$

$$(x - a)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - c)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 .$$

Si la superficie es dada por $z = f(x,y), \nabla F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. Encontrar la ecuación del plano tangente y la recta normal:

a) $z = \frac{x}{y}$ en $(1,1)$ Resp: $x - y - z + 1 = 0$

b) $z = 2xy + y^2$ en $(1,1)$ Resp: $2x + 4y - z = 3$

c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en $(1,2,\sqrt{5})$

d) $x^2 + xy - y^2 - z = 0$ en $(2,-1,1)$

16. Probar que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el origen.

17. Todo plano tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

18. Asumiendo que el sistema de ecuaciones

$$F(x,y,u,v) = 0$$
$$G(x,y,u,v) = 0$$

Determina $u(x,y), v(x,y)$, calcular por derivación del sistema u_x, v_x, u_y, v_y en los casos:

a) $\begin{matrix} u + e^v = x + y \\ e^u + v = x - y \end{matrix}$ Resp: $\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^v - 1}{e^{u+v} - 1} & , & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-e^v - 1}{e^{u+v} - 1} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e^u - 1}{e^{u+v} - 1} & , & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + 1}{e^{u+v} - 1} \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} x^2 - u - v = 0 \\ y - u^2 + v^2 = 0 \end{matrix}$

19. Encuentre el mínimo valor de la función $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$

Resp: $f(3,-1) = -8$ valor mínimo.

20. Sea R el rectángulo definido por $R = \{(x,y) / |x| \le 3, |y| \le 1\}$.Encontrar los valores extremos de la función sobre el rectángulo R:

a) $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$

b) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$

Resp: a) –3 mínimo, 22 valor máximo

b) 0 mínimo, 13 máximo

21. Determine el valor mínimo de z para puntos sobre la curva que es la intersección de la superficie descrita por $z=\sqrt{3x^2+8y^2+4}$ y el plano de ecuación $x+3y-z=0$.

Indicación: Tome $H(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=z+\lambda_1(3x^2+8y^2-z^2+4)+\lambda_2(x+3y-z)$

Resp: $x=\dfrac{16\lambda_1{}^2-1}{6\lambda_1}$, $y=\dfrac{48\lambda_1{}^2-3}{16\lambda_1}\Rightarrow\therefore z=\dfrac{2}{11}\sqrt{385}$ por consideraciones geométricas este es el valor mínimo deseado para z.