Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Depto. de Matemática y Computación

Cálculo Avanzado. Guía 1

A. Obtener la serie de Fourier de y = f(x) , x ∈ [-π,π], periódica de periodo 2π si:

1.- f (x) = x ; $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} sen\,(nx) \right)$

2.- f (x) = x^2 ; $\left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \right)$

3.- f (x) = $\begin{cases} -1\ , & -\pi \le x < 0 \\ 1\ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$; $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{sen\,(2n-1)x}{2n-1} \right)$

4.- f (x) = e^x ; $\left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{1+n^2} \cos nx - n\ sen\ nx \right)$

5.- f (x) = |x| ; $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right)$

6.- f (x) = $\pi^2 - x^2$; $\left(\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \right)$

7.- f (x) = $e^{|x|}$; $\left(\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{((-1)^n e^{\pi} - 1)}{1+n^2} \cos nx \right)$

8.- f (x) = $\begin{cases} 0\ , & -\pi \le x < 0 \\ x\ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{4} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\, nx \right)$

9.- f (x) = $\pi - x$; $\left(\pi + \sum_{1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} sen\, nx \right)$

B. Obtener serie de Fourier y = f (x), x ∈ [-p,p], periódica de periodo 2p, p ∈ ℜ fijo, si:

1.- $f(x)=1-|x|\ ,\ x\in[-1,1]$; $\left(\ \frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}\ \right)$

2.- $f(x)=\begin{cases} 0 & , -1\le x\le 0 \\ 1 & , 0< x\le 1 \end{cases}$; $\left(\ \frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}sen(n\pi x)\ \right)$

3.- $f(x)=\begin{cases} 1 , & -2\le x<0 \\ x , & 0\le x\le 2 \end{cases}$; $\left(\ 1-\sum_{1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi x}{2}}{(2n+1)^2}+\frac{1}{\pi}\frac{sen\ (n\pi x)}{n}\ \right)$

4.- $f(x)=e^{-x}$, $-1\le x\le 1$; $\left(\ \frac{e-1}{e}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e-e^{-1})}{1+n^2\pi^2}(\cos(n\pi x)+n\pi sen\ (n\pi x))\ \right)$

5.- $f(x)=\begin{cases} 0 , & -\frac{1}{2}\le x<0 \\ e^x , & 0\le x\le \frac{1}{2} \end{cases}$; $\left(e^{\frac{1}{2}}-1+\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}}(-1)^n-1}{\frac{1}{4}+n^2\pi^2}(\frac{1}{2}\cos(2n\pi x)-n\pi\ sen(2n\pi x))\right)$

6.- $f(x)=x\ ,\ x\in[-1,1]$; $\left(\ \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}sen(n\pi x)\ \right)$

7.- $f(x)=\begin{cases} -1 , & -1\le x<0 \\ 1 , & 0\le x\le 1 \end{cases}$; $\left(\ \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)\pi x}{2n-1}\ \right)$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Depto. de Matemática y Computación

Cálculo Avanzado. Guía 2

A. Obtener la serie de Fourier de y = f(x) , x $\in$ [a,b], periódica, de periodo b-a, a y b $\in \Re$ si:

1.- $f(x) = x \quad , \quad x \in [0, 2\pi] \;;$ $\qquad \left(\pi - 2\sum_{1}^{\infty} \frac{sen\; nx}{\pi} \right)$

2.- $f(x) = |\cos x| \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

3.- $f(x) = x^2 \quad , \quad x \in [1,3]$

4.- $f(x) = x \quad , \quad x \in [1,2]$

5.- $f(x) = \begin{cases} x \;, \text{ si } 0 \le x < 1 \\ 1 - x \;, \text{ si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

B. Para funciones y = f(x), con x$\in$ [0,p], obtener sus series de Fourier coseno y seno, periódica, de periodo 2p. (Extensiones de medio rango).

1.- $f(x) = \pi - x \quad , \quad x \in [0, \pi] \;;$ $\qquad \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos nx \;; 2\sum_{1}^{\infty} \frac{sen\; nx}{n} \right)$

2.- $f(x) = e^{-x} \quad , \quad x \in [0, \pi]$

3.- $f(x) = e^{x} \quad , \quad x \in [0,1]$

4.- $f(x) = x^2 - x \quad , \quad x \in [0,1]$

C. Aplicar teorema de convergencia puntual de series de Fourier en ejercicios precedentes, (guía n1 y siguientes) para determinar valor de suma de series numéricas (convergencia). Por ejemplo:

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ , etc.}$$

D. Aplicar la identidad de Parseval a series de Fourier $a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos \frac{nx\pi}{p} + b_n sen \frac{n\pi x}{p})$ de funciones y = f (x), $x \in [-p, p]$, periódicas de periodo 2π :

$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} (f(x))^2 dx = 2a_0{}^2 + \sum_1^{\infty} (a_n{}^2 + b_n{}^2)$ y deducir con esto las convergencias:

1.- $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2.- $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

3.- $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

4.- $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

5.- $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Depto. de Matemática y Computación

Cálculo Avanzado. Guía 3

A. Obtener la integral de Fourier de y = f(x) , x $\in$ R:

1.- $f(x) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 \ , \ \text{si } |x| > 1 \end{cases}$; ($\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen\ w}{w} \cos wx\, dw$)

Deducir la convergencia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen\ w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$

2.- $f(x) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si x} < 0 \\ \tfrac{1}{2} \ , \ \text{si x} = 0 \\ e^{-x} \ , \ \text{si x} > 0 \end{cases}$; ($\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+w^2}\cos wx + \frac{w}{1+w^2}\, sen\ wx\right) dw$)

Deducir la convergencia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2} = \frac{\pi}{2}$

3.- $f(x) = \begin{cases} x \ , \ \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 \ , \ \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

4.- $f(x) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si x} < -2 \\ x \ , \ \text{si } -2 < x < 1 \\ 2-x \ , \ \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 \ , \ \text{si x} > 2 \end{cases}$

B. Obtener integral de Fourier de medio rango, $x \in [0, \infty)$:

1.- Para $f(x) = e^{-kx}$, k cte., k > 0, x > 0, integral de coseno, integral de seno. Estudiar convergencia en $x_0 = 0$.

2.- Para $f(x) = \begin{cases} x \ , \ \text{si } 0 < x < a \\ 0 \ , \ \text{si } x > a \end{cases}$, integral de coseno

3.- Para $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ , \ \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 \ , \ \text{si } x > \pi \end{cases}$, integral de seno

4.- Para $f(x) = \begin{cases} x \ , \ \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x \ , \ \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 \ , \ \text{si } x > 2 \end{cases}$, integral de coseno

5.- Para $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{sen } x \ , \ \text{si } 0 \le x < \pi \\ 0 \ , \ \text{si } x > \pi \end{cases}$, integral de seno

(Soluciones de B.2 = $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (\frac{a \, sen \, aw}{w} + \frac{\cos aw}{w^2} - \frac{1}{w^2}) \cos wx \, dw$;
B.3 = $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\frac{1 - \cos \pi w}{w} sen \, wx \, dw$; B.5 = $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{sen \pi w}{1 - w^2} sen \, wx \, dw$

C. Si f (x) tiene integral de Fourier,

$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A(w) \cos wx + B(w) sen \, wx) dw$, con $A(w) = \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos wv \, dv$,
$B(w) = \int_{-\infty}^\infty f(v) sen \, wv \, dv$, deducir la igualdad de Parseval
$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty (f(x))^2 dx = \int_0^\infty (A(w)^2 + B(w)^2) dw$. Aplicar esta igualdad para obtener convergencias de integrales.