DIFERENCIABILIDAD

GUIA PROBLEMAS RESUELTOS

En términos de vecindades circulares, la definición de límite para funciones de dos variables toma la forma: $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y)=L$ si y solo si correspondiente a un arbitrario numero ε existe un numero positivo $\delta=\delta(\varepsilon)$ tal que $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ implica $|f(x,y)-L|<\varepsilon$, para todo punto $(x,y)\in Dom(f)$

<u>Problema 1</u>

Sea $f:\Re^2\to\Re$ una función definida por $f(x,y)=x^2+2xy$, encuentre si es que existe $\underset{(x,y)\to(3,-1)}{lím} f(x,y)$

Solución

Observe que cuando (x,y) esta próximo a $(3,-1)$, entonces x^2+2xy esta próximo a 3 por lo cual se espera que

$$\underset{(x,y)\to(3,-1)}{lím} f(x,y)=3$$

para comprobar esto debe ocurrir que para cada $\varepsilon>0$ debemos encontrar un $\delta>0$ tal que

$$\left|x^2+2xy-3\right|<\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0<\left|(x,y)-(3,-1\right|<\delta$$

debemos expresar $\left|x^2+2xy-3\right|$ en términos de $|x-3|$ y $|y+1|$

$$\begin{aligned}\left|x^2+2xy-3\right| &= \left|(x-3)^2+2(x-3)(y+1)+4(x-3)+6(y+1)\right| \\ &\le |x-3|^2+2|x-3||y+1|+4|x-3|+6|y+1|\end{aligned}$$

Considerando que:

$|x-3|<\|(x,y)-(3,-1)\|$ y $|y+1|<\|(x,y)-(3,-1)\|$, y restringiendo la condición de δ tal que $\delta\le 1$. Entonces si

$\|(x,y)-(3,-1)\|<\delta\le 1$, $|x-3|<1$ y

$$\left|x^2+2xy-3\right| < |x-3| + 2|y+1| + 4|x-3| + 6|y+1| < 13\delta$$

Por lo tanto, si escogemos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{13}\right\}$ se tiene que:

$$0 < \|(x,y)-(3,-1)\| < \delta \text{, entonces } \left|x^2+2xy-3\right| < \varepsilon$$

lo que prueba que $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(3,-1)} f(x,y) = 3$.

Problema 2

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Probar que $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Solución.

Para probar esto debemos establecer que para cada $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta .$$

Es evidente que $x^2 < x^2+y^2$ y $y^2 < x^2+y^2$, por lo cual

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} < \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \varepsilon$$

Por lo tanto si escogemos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ se tiene que

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta ,$$

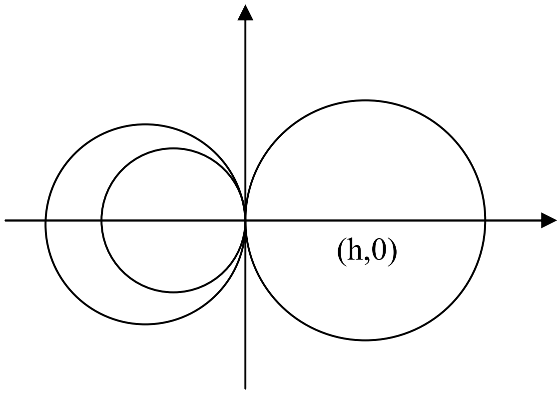
lo que prueba que $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

Problema 3

Sea $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, pruebe que no existe $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Solución.

Consideremos una curva de nivel N de f



circunferencias por el origen.

$$N = \left\{(x,y) / \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2h}\right\} = \left\{(x,y)/(x-h)^2 + y^2 = h^2\right\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2hx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2h} = \frac{1}{2h}$$

Para distintos valores de h, estos valores son distintos, por la unicidad del límite podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ no existe.

Problema 4

Sea $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ ¿Existirá $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solución.

Sea $T = \{(x,y) / y = \alpha x\}$ rectas por el origen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \alpha x}{x^4 + (\alpha x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2} = 0$$

aparentemente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Elijamos $T_1 = \{(x,y) / y = x^2\}$ parábola por el origen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ esto es suficiente para concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Problema 5

Una función f se define por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, sin embargo sus limites iterados ambos existen y son iguales a cero

Solución:

Sea $T = \{(x,y) / y = mx\}$ rectas por el origen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xmx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

lo cual indica que este límite no existe

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Problema 6

Para $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{xy} & , \ xy\neq 0 \\ 1 & , \ xy=0 \end{cases}$

a) Verificar que es continua en $\Re^2$
b) Calcular, si existen, $f_x(x,y), f_y(x,y)$ en $\Re^2$

Solución.

a) En (x_0,y_0) con $x_0 y_0 \neq 0$, f es continua por ser cuociente de funciones continuas.

En (x_0,y_0) con $x_0 y_0 = 0$, anotamos $\mu = xy$ si $(x,y)\to(x_0,y_0)$, entonces $\mu\to 0$ por lo cual $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\sin xy}{xy} = \lim_{\mu\to 0}\dfrac{\sin\mu}{\mu} = 1$, por otra parte en este caso $f(x_0,y_0) = 1$. Luego f es continua en todo $\Re^2$

b) Si $xy \neq 0$, entonces $f_x(xy) = \dfrac{xy\cos xy - \sin xy}{x^2 y}$ y

$f_y(xy) = \dfrac{xy\cos xy - \sin xy}{xy^2}$

si $xy = 0$ tenemos varios casos utilizando la definición

$$f_x(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

(incluye el caso $x_0 = 0$)

$$f_x(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin\ hy_0}{hy_0} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen\ \ hy_0 - hy_0}{h^2 y_0} = \lim_{h\to 0} y_0 \left(\frac{sen\ \ hy_0 - hy_0}{(hy_0)^2} \right), \text{ sea } \mu = hy$$

$$= y_0 \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin\mu - \mu}{\mu^2} \right) = y_0 \lim_{h\to 0} \frac{\cos\mu - 1}{2\mu}$$

$$= y_0 \lim_{h\to 0} - \frac{\sin\mu}{2} = y_0 \cdot 0 = 0$$

de manera análoga se calcula $f_y(x_0, y_0) = 0$ si $x_0 y_0 = 0$

<u>Problema 7</u>

Sea $f: \Re^2 \to \Re$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Calcular

a) $f_x(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$
b) $f_x(0,0)$
c) $f_{xy}(0,0)$

Solución

a) Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore f_x(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

b) $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h\cdot 0(h^2-0^2)}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

c) $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h(0^4+4\cdot 0^2\cdot h^2-h^4)}{(0^2+h^2)^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^5}{h^5}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(-1)=-1$

$\therefore f_{xy}(0,0)=-1$

Problema 8

Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\tan\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Estudiar su continuidad en cada $(x,y)\in\Re^2$

b) Determinar si existe o no $f_x(0,0)$

Solución.

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, $x^2+y^2\neq(2n-1)^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$, f es continua por ser cuociente de funciones continuas.

Para $(x,y)=(0,0)$, $f(0,0)=0$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\tan\sqrt{x^2+y^2}}$,

poniendo $\mu=\sqrt{x^2+y^2}$ $\mu\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\mu\to 0}\frac{\sin\mu^2}{\tan\mu}=\lim_{\mu\to 0}\mu\cdot\frac{\sin\mu^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\dfrac{\tan\mu}{\mu}}=0\cdot 1\cdot 1=0$$

Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$

Por último si (x,y) está en la circunferencia $x^2+y^2=(2n-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}$ $f(x,y)$ no está definida y por tanto es discontinua allí.

b) $f_x(0,0) = \underset{h \to 0}{lím} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \underset{h \to 0}{lím} \dfrac{\dfrac{\sin h^2}{\tan \sqrt{h^2}} - 0}{h}$

$$= \underset{h \to 0}{lím} \frac{\sin h^2}{h^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{h \cdot \tan \sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2}}} \cdot \frac{h^2}{\sqrt{h^2}} = \underset{h \to 0}{lím} \frac{h}{|h|}$$

este último límite no existe. Luego no existe $f_x(0,0)$.