DERIVADAS PARCIALES

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sustituyendo directamente verifique que $\mu = \dfrac{ax^2+by^2}{cx^2+dy^2}$ es una solución de la ecuación diferencial:

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

2. Obtenga las derivadas parciales primeras respecto de cada una de las variables independientes.

a) $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos xy$ **R:** $f_x(x,y) = 3x^2y^2 + 4x^3 \sin y + -y \sin xy$
$f_y(x,y) = 2x^3 y + x^4 \cos y - x \sin xy$

b) $f(x,y) = (x-y)\sin(x+y)$

c) $x = r\sin\phi\cos\theta$ **R:** $x_r = \sin\phi\cos\theta$, $x_\phi = r\cos\phi\cos\theta$
$x_\theta = -r\sin\phi\sin\theta$

d) $u = x + y + xy + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ **R:** $u_x = \dfrac{x^2y + x^2y^2 + x^2 - y^2}{x^2 y}$
$u_y = \dfrac{xy^2 + x^2y^2 - x^2 + y^2}{xy^2}$

e) $f(x,y,z) = x^y + x^z + y^x + y^z + z^x + z^y$ **R:** $f_x = yx^{y-1} + zx^{z-1} + y^x \ln y + z^x \ln z$,
$f_y = x^y \ln x + xy^{x-1} + zy^{z-1} + z^y \ln z$
$f_z = x^z \ln x + y^z \ln y + xz^{x-1} + yz^{y-1}$

3. Calcule las derivadas parciales de segundo orden para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ **R:** $f_{xx} = -\dfrac{2y}{(x+y)^3}$, $f_{xy} = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, $f_{yy} = \dfrac{2x}{(x+y)^3}$

b) $u = xe^y + y\sin z$ **R:** $u_{xx} = 0$, $u_{yy} = xe^y$, $u_{zz} = -y\sin z$, $u_{xy} = e^y$, $u_{xz} = 0$,
$u_{yz} = \cos z$

c) $u = z\arctan\dfrac{y}{x}$ **R:** $u_{xx} = \dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $u_{yy} = -\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $u_{zz} = 0$,

$$u_{xy} = \frac{(y^2 - x^2)z}{(x^2 + y^2)^2},\ u_{xz} = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2},\ u_{yz} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}$$

4. Sea f una función definida en todo $\Re^2$ por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$
b) Muestre que $f_{xy}(0,0) = 1$ y $f_{yx}(0,0) = -1$

R: $f_x(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Se define la función f en $\Re^2$ por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\dfrac{y}{x} - y^2 \arctan\dfrac{x}{y}, & xy \neq (0,0) \\ 0 & , xy = (0,0) \end{cases}$$

Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

6. Sea $u = \dfrac{xy}{x+y}$, muestre que u satisface la ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

7. Sea $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, probar que $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

8.Sea $f(x,y,z)=x^{(y/z)}+x^{(z/y)}+y^{(x/z)}+y^{(z/x)}+z^{(x/y)}+z^{(y/x)}$.Calcule $f_x(1,1,1), f_y(1,1,1),$
$f_z(1,1,1)$ **R:** 2 en todos los casos

9.Sea $f(x_1,x_2,....,x_n)=\ln(x_1x_2\cdots x_n)$. Calcule

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(1,1,1,...,1)$$ **R:** n

10.Suponga que *z* es una función de *x* e *y* que satisface la ecuación que se da en cada caso. Encontrar sus derivadas parciales de primer orden.

a) $x^3+y^3+z^3+\sin xz+\cos yz=15$

b) $e^z+x^2\ln z+y=0$ **R:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2xz\ln z}{ze^z+x^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-z}{ze^z+x^2}$

11.Suponga que existen funciones *u, v* que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} u\cos v=x+1 \\ u\sin v=x+y \end{cases}.$$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ **R:** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos v+\sin v$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin v$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\cos v-\sin v}{u}$

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\cos v}{u}$

12.Calcule la derivada direccional de la función dada en la dirección del vector indicado

a) $f(x,y)=x^2+y^2$ en $(0,0)$, $\vec{v}=(a,b)$ **R:**0

b) $f(x,y)=xy^2+x^2y$, $\vec{v}=(1,0)$ **R:** y^2+2xy

c) $f(x,y,z)=2x^2-z^2-y^2$ en $(1,2,2)$ hacia $(4,5,0)$ **R:** $\dfrac{8}{\sqrt{22}}$

d) $f(x,y,z)=x^2-8xy+z^2$ en la dirección de la normal exterior a la superficie $x^2+y^2+z=17$ en el punto $(4,4,1)$ **R:** $\dfrac{-446}{\sqrt{129}}$

13.Sea f un función diferenciable de (u,v) y sea g una función de (x,y) definida por:

$$g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$$

Calcular: $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}$