Funciones Vectoriales

Curvas

Guía # 1

Ejemplo 1.- (Una curva en $\Re^3$)

Esbozar la gráfica de la curva determinada por la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, $z \geq 0$ y el cilindro parabólico $y = x^2$.

Solución.

Pongamos $x = t \Rightarrow y = t^2$ por otra parte de la esfera $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$ pues $z \geq 0$, entonces $z = \sqrt{20 - t^2 - t^4}$, $z = 0 \Leftrightarrow 20 - t^2 - t^4 = 0 \Rightarrow t = 2$. Los puntos de intersección de la curva con el plano XY son :

A(2,4,0) , B(-2,4,0)

Entonces

$$r(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + \sqrt{20 - t^2 - t^4}\,\hat{k} \quad \text{con} \quad -2 \leq t \leq 2$$

o lo que es lo mismo, sus ecuaciones paramétricas son:

$$C: \quad \begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= \sqrt{20 - t^2 - t^4} \end{aligned} \qquad \text{con} \quad -2 \leq t \leq 2$$

Ejemplo 2.-Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria $r'(t)$ de modo que el vector aceleración en cada punto es radial, o sea paralelo a $r(t)$.

a) Probar que el vector $r(t) \times r'(t)$ es constante.
b) Probar que la trayectoria está en un plano.

Solución.

a) Si $r''(t)$ paralelo a $r(t) \Rightarrow r(t) \times r''(t) = 0$

derivando

$$\frac{d}{dt}(r(t) \times r'(t)) = r(t)' \times r'(t) + r(t) \times r''(t) = 0 + 0 = 0$$

y si $\dfrac{d}{dt}(r(t) \times r'(t)) = 0$ se tiene que $r(t) \times r'(t) =$ cte.

b) La trayectoria de $r(t)$ está en el plano si sólo si su torsión es nula.

Sabemos $\tau(t) = \dfrac{r'(t)\times r''(t)\cdot r'''(t)}{\|r'(t)\times r''(t)\|}$

$r''(t)$ es paralela a $r(t)$, entonces $r''(t) = \alpha(t)r(t)$, $\alpha(t)\in\Re$

y $r'''(t) = \alpha'(t)r(t) + \alpha(t)r'(t)$

Así

$$\begin{aligned} r(t)'\times r''(t)\cdot r'''(t) &= r'(t)\times r''(t)\cdot(\alpha'(t)r(t)+\alpha(t)r'(t)) \\ &= \alpha'(t)(r'(t)\times r''(t)\cdot r(t)) + \alpha(t)(r'(t)\times r''(t)\cdot r'(t)) \\ &= \alpha'(t)\cdot 0 + \alpha(t)\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $\tau(t) = 0$.

Luego la trayectoria está en un plano.

Ejemplo 3.- Calcule T, ecuación del plano normal y recta tangente a la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ en el punto $(1,1,1)$.

Solución.

La curva que contiene (1,1,1) es: $x^2 + y^2 = 2$, z = 1

Si $x = t \Rightarrow y = \sqrt{2-t^2}$. La expresión vectorial que describe esta curva es :

$$r(t) = t\hat{i} + \sqrt{2-t^2}\,\hat{j} + \hat{k}$$

a) $T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \Rightarrow T(t) = \dfrac{(1,\dfrac{-t}{\sqrt{2-t^2}},0)}{\sqrt{1^2 + \dfrac{t^2}{2-t^2}}}$

De donde se obtiene $T(t) = \dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{2}}(1,\dfrac{-t}{\sqrt{2-t^2}},0)$

Como $r(1) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} = (1,1,1)$; evaluando T en $t = 1$ se tiene $T(1) = (1,-1,0)$ vector tangente unitario en $(1,1,1)$.

b)Plano normal a la curva en (1,1,1) es:

$1(x-1) + (-1)(y-1) + 0(z-1) = 0$ de donde se obtiene $x - y = 0$

c) Recta tangente : $r(t) = (x_0, y_0, z_0) + s(1,-1,0)$

Como $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$, se tiene $r(t) = (1+s, 1-s, 1)$

Ejemplo 4.- Utilizando sus motores una nave espacial describe el movimiento:

$$r(t) = (3 + t, 2 + \ln t, a - \frac{4}{t^2 + 1})$$

Se desea que llegue a la estación ubicada en P=(6,4,9), en ausencia de fuerzas gravitacionales.¿Cuándo hay que apagar los motores?¿Cuál es el valor de a?

Solución.

Sea t_0 tal que $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ es un punto en que se deseen apagar los motores y a partir de allí la nave sale por la tangente. Por lo tanto debemos determinar t_0, α y a tal que la tangente pase por P=(6,4,9).

Ecuación de la tangente: $r(t_0) + \alpha\, r'(t_0) = (6,4,9)$

$$\Rightarrow (3 + t_0, 2 + \ln t_0, a - \frac{4}{t_0^{\,2} + 1}) + \alpha(1, \frac{1}{t_0}, \frac{8t_0}{(t_0^{\,2} + 1)^2}) = (6,4,9)$$

$$\Rightarrow 3 + t_0 + \alpha = 6, 2 + \ln t_0 + \frac{\alpha}{t_0} = 4, a - \frac{4}{t_0^{\,2} + 1} + \frac{8t_0\alpha}{(t_0^{\,2} + 1)^2} = 9$$

$$\alpha = 3 - t_0 \Rightarrow \ln t_0 + \frac{3 - t_0}{t_0} = 2 \Rightarrow t_0 \ln t_0 = 3t_0 \cdot 3$$

De donde se obtiene $t_0 = 1$.

Si $t_0 = 1 \Rightarrow \alpha = 2$ y a =7

Se desean apagar los motores cuando la nave se encuentra en el punto: (4,2,5).

Ejemplo 5.- Para una partícula que se desplaza según una trayectoria C dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t} - \frac{1}{2})$. Calcular en el punto $P_0 = (1,0,\frac{1}{2})$:

a) Los vectores $\vec{v}, \vec{a}, T, B\ y\ N$.
b) Los escalares $K, \tau, a_T\ y\ a_N$

Calcular además la longitud de C, desde P_0 hasta el punto P_1 correspondiente a la intersección de C con el plano XY.

Solución.

De $r(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t} - \frac{1}{2})$, $P_0 = r(0) = (1,0,\frac{1}{2})$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t, -e^{-t})$, $r''(t) = (-\cos t, -\sin t, e^{-t})$, $r'''(t) = (\sin t, \cos t, -e^{-t})$

$\therefore v(o) = r'(0) = (0,1,-1)$, $\vec{a}(0) = r''(0) = (-1,0,1)$

$$T(0) = \frac{r'(0)}{\|r'(0)\|} \Rightarrow T(0) = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$$B(0)=\frac{r'(0)\times r''(0)}{\|r'(0)\times r''(0)\|}\Rightarrow B(0)=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$N=T\times B\Rightarrow N=\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}}$$

$$K(t)=\frac{\|r'(t)\times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}\Rightarrow K(0)=\frac{\|(1,1,1)\|}{\|(0,1,-1)\|^3}=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^3}$$

$$\tau(0)=\frac{\vec{r}\,'(0)\times\vec{r}\,''(0)\cdot\vec{r}\,'''(0)}{\|r'(t)\times r''(t)\|^2}\Rightarrow\tau(0)=\frac{(1,1,1)\cdot(0,-1,-1)}{\|(1,1,1)\|^2}=\frac{-2}{3}$$

$$a=a_T T+a_N N\Rightarrow(-1,0,1)=a_T\,\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}+a_N\,\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow a_T=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ y }\ a_N=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$e^{-t}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow t=\ln 2\Rightarrow P_1=(\cos(\ln 2),\sin(\ln 2),e^{-\ln 2}-\frac{1}{2})=\ (\cos(\ln 2),\sin(\ln 2),0)$$

$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+e^{-2t}}\,dt$, hacer $u=\sqrt{1+e^{-2t}}\Rightarrow du=\dfrac{u^2-1}{u}du$

$$\Rightarrow l=-\left[u+\int\frac{du}{\cancel{u}^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\left[-u-\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\approx 0.8583$$

Microsoft Editor de ecuaciones 3.0