UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Dpto. de Matemática y Ciencias de Computación

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Pruebe que todo camino del tipo $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}^2$ dada por $f(t) = (at+b, ct+d)$ donde *a, b, c* y *d* son números reales, a y b no nulos es una curva simple. Describa su traza.
R. es una recta.

2.- Hallar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de la recta tangente para cada una de las siguientes curvas en el punto dado.
a) $r(t) = (\cos t)i + (\operatorname{sen} 2t)j$ en $t = 0$
b) $r(t) = \sqrt{2}ti + e^t j + e^{-t}k$, $t = 0$
R. (a) $v(0) = 2j$, $a(0) = -i$, $\ell(t) = i + (2t)j$, (b) $v(0) = \sqrt{2}i + ej - e^{-1}k$, $a(0) = ej + e^{-1}k$,

3.- Demuestre que el camino $f : [-2,2] \to \mathrm{IR}^2$, $f(t) = (t^2 - 1, t^3 + 2t^2 - t - 2)$ no es simple. ¿Es cerrado?, ¿ Es cerrado simple?
R. $f(1) = (0,0) = f(-1)$, no es simple

4.- Mostrar que, si la aceleración de un objeto siempre es perpendicular a la velocidad, entonces la rapidez del objeto es constante.

5.- Para $f : [a,b] \to \mathrm{IR}^n$, $g : [a,b] \to \mathrm{IR}^n$ derivables, probar:
a) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, α y β son constantes
b) $(\alpha(t)f(t))' = \alpha'(t)f(t) + \alpha(t)f'(t)$, si $\alpha = \alpha(t)$ es función escalar
c) $(f \cdot g)'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$
d) $(f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$, donde $n = 3$

6.- Hacer un esbozo de la curva intersección de las superficies. Representar la curva mediante una función vectorial usando el parámetro dado
a) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 0$, $x = t$
b) $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2$, $x = 2\operatorname{sen} t$
c) $x^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$, $x = t$ en el primer octante.
R. a) $r(t) = ti - tj + 2t^2k$ b) $r(t) = 2\operatorname{sen} ti + 2\cos tj + 4\operatorname{sen}^2 tk$ c) $r(t) = ti + tj + \sqrt{4 - t^2}k$

7.- Determine la ecuación de la recta tangente y del plano normal a la curva descrita por el camino $f : \mathrm{I} \to \mathrm{IR}^3$ en el punto indicado
a) $f(t) = (t^3 - 2t, t^2 + 1, 3)$ en $P = f(1)$
b) $f(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, 5t)$ en $P = f(0)$
R. a) $\ell(t) = (t - 1, 2 + 2t, 3)$, el plano es *x+2y=3* b) $\ell(t) = (t, 1 + t, 5t)$,el plano es $x + y + 5z = 1$

8.- Considere el camino $f : [0, 2\pi r] \to \mathrm{IR}^2$ dada por $f(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\operatorname{sen}\frac{s}{r})$. Es la parametrización por longitud de arco del circulo $x^2 + y^2 = r^2$. Calcule $f''(s)$. Compruebe que este vector es ortogonal a $f'(s)$ para todo s en $[0, 2\pi r]$. Interprete geométricamente este hecho. Calcule $|f''(s)|$.
R. $f''(s) = -r^{-1}(\cos(s/r), \operatorname{sen}(s/r))$, $|f''(s)| = 1/r$

9.- Considere el camino $f:[0,\operatorname{senh} 3] \to \mathrm{IR}^2$ dado por

$$f(s) = (\ln(s+\sqrt{s^2+1}), \cosh(\ln(s+\sqrt{s^2+1})))$$

Esta es la parametrización por longitud de arco de la catenaria $y = \cosh x$ en el intervalo $[0,3]$. Calcule $f''(s)$.Compruebe que este vector es ortogonal a $f'(s)$ para todo s en $[0,\operatorname{senh} 3]$. Calcule $\|f''(s)\|$

R. $f''(s) = (s^2+1)^{3/2}(-s,1)$, $\|f''(s)\| = 1/(s^2+1)$

10.- Sea $f:[0,5] \to \mathrm{IR}^3$ el camino definido por $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$. Obtenga una parametrización $\overline{f}$ de *f*, que conserve su orientación y recorra la traza de f en la quinta parte del tiempo que lo hace *f*.

R. $\overline{f}:[0,1] \to \mathrm{IR}^3$, $\overline{f}(s) = (\operatorname{sen} 5s, \cos 5s, 5s)$

11.- Determine una función $f: \mathrm{I} \to \mathrm{IR}^2$ que parametrice la curva indicada

a) El eje x, recorrido de izquierda a derecha.
b) La cuarta parte del circulo $x^2+y^2=3$ que se encuentra en el segundo cuadrante, recorrido en sentido antihorario.
c) El cuadrado $|x|+|y|=1$ recorrido en sentido antihorario.

R.a) $f:\mathrm{IR} \to \mathrm{IR}^2$, $f(t)=(t,0)$ b) $f:[\pi/2,\pi] \to \mathrm{IR}^2$,

c) $f:[0,4] \to \mathrm{IR}^2$ tal que si $t\in[0,1)$, $f(t)=(1-t,t)$, si $t\in[1,2)$, $f(t)=(1-t,2-t)$, si $t\in[2,3)$, $f(t)=(t-3,2-t)$, y si $t\in[3,4]$, $f(t)=(t-3,t-4)$

12.- Hallar la longitud de arco de la curva dada en el intervalo especificado

a) $c(t)=(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$, en $0\le t\le 2\pi$
b) $c(t)=(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$, en $0\le t\le 1$

R. a) $2\sqrt{5}\pi$, b) $2(2\sqrt{2}-1)$

13.-Sea C la curva obtenida al interceptar las superficies $x^2-y=0$ y $2x-z=0$

a) Parametrizar la curva C como $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$ con $t\in\mathrm{IR}$
b) Evaluar T,N,B en el punto $P_0=(1,1,2)$
c) Calcular $K(t)$ y $\tau(t)$ para todo *t*.

R. a) $c(t)=(t,t^2,2t)$, $t\in\mathrm{IR}$

b) $t_0=1$, $T(1)=(1/3,2/3,2/3)$, $N(1)=\dfrac{(-2,5,-4)}{7\sqrt{5}}$, $B(1)=\dfrac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}}$

c) $K(t)=\dfrac{2\sqrt{5}}{(5+4t^2)^{3/2}}$, $\forall t\in\mathrm{IR}$, $\tau(t)=0$ $\forall t\in\mathrm{IR}$, la curva está en un plano.

14.- Calcule la curvatura de la cicloide $c:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}^2$, $c(t)=(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$. Grafique la cicloide. ¿Qué sucede en los puntos en los que $\cos t=1$?

R. $k(t)=-\sqrt{2}(4\sqrt{1-\cos t}\,)^{-1}$

15.- Sea C la curva de ecuación $y=(x-1)^2+3$

a) Hallar el punto de la curva en que la curvatura k es máxima y

b) Calcular el límite de k cuando $x \to \infty$.

R. a) (1,3), b) 0

16.- Determine las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a la curva de intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=3$, $x^2+y^2=2$ en el punto $P_0=(1,1,1)$.

R. Plano osculador: $z=1$, plano normal: $y=x$, plano rectificante: $x+y=2$

17.- Sea $r(t)=(e^t)i+(e^{2t})j$. Calcule a_T, a_N y k

R. $a_T=\dfrac{e^t(1+8e^{2t})}{\sqrt{1+4e^{2t}}}$, $a_N=\dfrac{2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{2t}}}$, $k=\dfrac{2}{(1+4e^{2t})^{3/2}}$

18.- Considere la hélice $c(t)=(a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$. Demuestre que:

a) El ángulo que forma la recta tangente con el eje z es constante.
b) La recta normal en cualquier punto de la curva es perpendicular al eje z.
c) El ángulo que forma la recta binormal con el eje z es constante.
d) El cociente de la curvatura entre la torsión es constante.