U. SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
SEGUNDA PRUEBA DE CALCULO AVANZADO
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2008
28/11/08.

Pregunta 1.- Sea $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Verificar que f es continua en $(0,0)$
b) Calcular $f_x\,(0,0)$; $f_x\,(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$
c) Verificar que f_x continua en $(0,0)$
d) Calcular $D_{\widehat{e}} f\,(0,0)$ donde el versor $\widehat{e} = (e_1, e_2)$

Solución

a) Se determina $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$

por cuanto $|f(x,y) - 0| = \left| -\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq \dfrac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \varepsilon$

si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon}$. Con esto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = 1$ y como $f(0,0) = 1$ entonces f es continua en $(0,0)$

(0,5)

b) $$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\dfrac{\Delta x^2 \cdot 0^2}{(\Delta x)^2 + 0^2}} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0;$$

$$f_x(x,y) = e^{-\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}} \left[-y^2 \frac{2x(x^2+y^2) - x^2 2x}{(x^2+y^2)^2} \right] = -y^2 \cdot \frac{e^{-\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}} \cdot 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = -2xy^4 \cdot \frac{e^{-\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}$$

(0,5)

c) Se calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$: se tiene $\left| \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq 2 \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$

si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\quad y \quad$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0$, $f_x(0,0) = 0$
(según b y $f_x(x,y)$ es continua)

(0,5)

d) Con definición $D_{\widehat{e}}f(0,0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\lambda e_1, \lambda e_2) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{e^{-\dfrac{\lambda^2 e_1^2 \lambda^2 e_2^2}{\lambda^2(e_1^2+e_2^2)}} - 1}{\lambda}$

$\lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{e^{-\dfrac{\lambda^2 e_1^2 e_2^2}{1}} - 1}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{e^{-\lambda^2 e_1^2 e_2^2} - 1}{\lambda^2} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{e^{-\lambda^2 e_1^2 e_2^2} - 1}{-(\lambda^2 e_1^2 e_2^2)} \cdot -(\lambda e_1^2 e_2^2) = 0$

Con $e_1 \neq 0, e_2 = 0$, aparte si $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$ igualmente $D_{\widehat{e}}f(0,0) = 0$

(0,5)

Nota También se puede con $D_{\widehat{e}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \widehat{e} = (0,0) \cdot (\widehat{e_1}, \widehat{e_2}) = 0$, porque según c) f es diferenciable

U. SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
SEGUNDA PRUEBA DE CALCULO AVANZADO
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2008
28/11/08.

Pregunta 2.-

Sea S una superficie dada por la ecuación $f(x,y) - xg\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ con g función arbitraria diferenciable en cada $P_o = (x_o, y_o) \in D_f$.Verificar que los planos tangentes a S en cada P_o pasan por el origen del sistema de coordenadas.

Solución

De $z - xg\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$ y con ecuación de plano tangente $\nabla F \cdot \overrightarrow{R} = 0$,

(0,2)

$$\overrightarrow{R} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad , \quad \nabla F = \left(-g\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right), -xg'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right), 1\right)$$

(0,3)

se tiene en punto de tangencia la ecuación de plano tangente:

$$\left(-g\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - \frac{x_0}{y_0}g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right), \frac{x_0^2}{y_0^2}g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right), 1\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -\left(g\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0}{y_0}g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right)x + \frac{x_0^2}{y_0^2}g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)y + z = -x_0 g\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - \frac{x_0^2}{y_0}g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \frac{x_0^2}{y_0}g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + z_0 = 0$$

(1,0)

O sea ecuación del tipo $Ax + By + Z$ que es verificada por el origen (0,0,0)

(0,5)

U. SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
SEGUNDA PRUEBA DE CALCULO AVANZADO
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2008
28/11/08.

Pregunta 3.-

Se construye un cilindro circular recto de radio 5 cm con dos tapas cónicas simétricas en los extremos, de volumen V_o dado.

Determinar la altura H del cilindro y altura h de cada tapa de manera que el área de la Superficie total sea mínima.

$$\text{Indicaciones: fórmulas} \quad S(r,H) = 2\pi r H \quad ; s(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$$
$$V(r,H) = \pi r^2 H \quad ; V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Solución

El volumen dado V_0 es $V_0 = 25\pi H + 50\frac{\pi}{3}h$; la superficie total es $S(H,h) = 10\pi H + 10\pi\sqrt{25+h^2}$, función de la cual se debe calcular valor mínimo.

(0,5)

Considerando $L(H,h,\lambda) = 10\pi H + 10\pi\sqrt{25+h^2} + \lambda(25\pi H + 50\frac{\pi}{3}h - V_0)$ se obtiene sistema para puntos críticos :

$$\begin{array}{rcr|ccc}
L_H = & 10\pi + 25\pi\lambda & =0 & \Rightarrow & \lambda = -\dfrac{2}{5} & \\
L_h = & \dfrac{10\pi h}{\sqrt{25+h^2}} + 50\dfrac{\pi}{3}\lambda & =0 & \Rightarrow & \dfrac{h}{\sqrt{25+h^2}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow & \\
L_\lambda = & 25\pi H + 50\dfrac{\pi}{3}h - V_0 & =0 & \Rightarrow & h = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} & \\
\hline
\end{array}$$

Con este h en L_λ da:$25\pi H + 50\frac{\pi}{3}2\sqrt{5} - V_0 = 0 \Rightarrow$

$$H = \frac{v_0 - \dfrac{100\sqrt{5}}{3}\pi}{25\pi} = \frac{V_0}{25\pi} - \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

(0,5)

Se confirma el valor mínimo calculando signo de $\dfrac{d^2s}{dh^2}$ a partir de $\dfrac{ds}{dh} = 10\pi\dfrac{dH}{dl} + 10\pi\dfrac{h}{\sqrt{h^2+25}}$ con $\dfrac{dH}{dh} = -\dfrac{2}{3}$, calculado de ecuación de condición con lo cual $\dfrac{ds}{dh} = -20\dfrac{\pi}{3} + 10\pi\dfrac{h}{\sqrt{h^2+25}}$, $\dfrac{d^2s}{dh^2} = 10\pi\cdot\dfrac{25-h^2}{(25+h^2)\sqrt{25+h^2}}$ que en $h_0 = 2\sqrt{5}$ se tiene $\dfrac{d^2s}{dh^2} > 0$ y $s(H_0,h_0)$ es valor mínimo

(1,0)