UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
TERCERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2012
(12/07/2012)

Problema 1:

Resolver la integral $\oint (1+e^{\sqrt{x}})dx + (x^2 + \cos y^2)dy$ **, si C es la curva cerrada, ubicada en el primer cuadrante, conformada por los arcos de circunferencia de radios 1 y 2 respectivamente y por los segmentos rectilíneos** $1 \le x \le 2$ **, en eje x,** $1 \le y \le 2$ **, en eje y.**

Solución:

De acuerdo con el teorema de Green se tiene:

$$\oint (1+e^{\sqrt{x}})dx + (x^2 + \cos y^2)dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos y^2 + x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(1+e^{\sqrt{x}}) \right] dxdy = \iint_D 2xdxdy$$

1 Punto

Cambiando a coordenadas polares, queda:

$$\iint_D 2xdxdy = 2\iint_{D^*} (r\cos) rdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 (r^2\cos\theta)drd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \cos\theta d\theta = \frac{14}{3}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{14}{3}$$

1 Punto

Problema 2:

Resolver la integral $\int_C \vec{F} \circ \vec{dr}$, **si** $\vec{F} = (x, y, z)$ **es un campo vectorial en** $\Re^3$ **, C es dada por** $y^2 + z^2 = 1, \quad x = z$ **comprendido entre los puntos** $A = (0,1,0)$ **y** $B = (1,0,1)$.

Solución:

Como el rotacional del campo $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0)$$ es nulo el campo es conservativo $\Rightarrow$ existe $\phi(x,y,z)$ tal que $\vec{F} = \nabla \phi(x,y,z)$

0.5 Puntos

es decir $\frac{\partial \phi}{\partial x} = x,\ \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y,\ \ \frac{\partial \phi}{\partial z} = z$. Integrando parcialmente la primera componente con respecto a x, se obtiene:

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + h(y,z) \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial y} = y \Rightarrow h(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$$

de modo que $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + g(z) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = g'(z) = z$

Por lo tanto el potencial es $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$

1 Punto

y la integral queda:

$$\int_C \vec{F} \circ \vec{dr} = \int_C xdx + ydy + zdz = \phi(B) - \phi(A) = \phi(1,0,1) - \phi(0,1,0) = \frac{1}{2}$$

0.5 Puntos

<u>Problema 3:</u>

Considere la región $Q \subseteq \Re^3$ limitada por los cilindros $x^2 + y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 4,$ y por los planos $z = 0,\ \ y + 2z = 4.$

Determinar:

a) **El área del manto cilíndrico de radio 2, comprendido entre los planos dados.**
b) **El volumen de Q.**
c) $\iint_S \vec{F} \circ \hat{n}\, ds$, si S es la frontera de Q y $\vec{F} = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$

Solución:

a) Parametrizada la superficie cilíndrica S como: $\vec{r}(u,v)=(2\cos u, 2senu, v)$, $(u,v)\in D:\ \ 0\le u\le 2\pi;\ \ 0\le v\le 2-senu$

Se tiene: $\vec{r}_u=(-2senu, 2\cos u, 0),\ \ \vec{r}_v=(0,0,1)$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=(2\cos u, 2senu, 0);\ \ \left\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\|=2\Rightarrow A(s)=\iint_D 2dudv=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2-senu}2dv\right)du=2\int_0^{2\pi}(v)_0^{2-senu}du=$$

$$A(s)=2\int_0^{2\pi}(2-senu)du=\ 8\pi\ \ unidades\ \ de\ \ área$$

0.6 Puntos

b)

$$V(Q)=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2\left(\int_0^{2-\frac{r}{2}senu}rdz\right)dr\right)du=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r(2-\frac{r}{2}senu)dr\right)du=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 2r\right)drdu=$$

$$V(Q)=2\cdot 2\pi\left(\frac{r^2}{2}\right)_1^2=6\pi\ \ unidades\ \ de\ \ volumen$$

0.6 Puntos

c) Con teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{F}\circ\hat{n}\,ds=\iiint_Q\nabla\circ\vec{F}\,dv=\iiint_Q(2xyz+2xyz+2xyz)dxdydz=6\iiint_Q xyzdxdydz=$$

$$6\iiint_Q xyzdxdydz=6\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{2-\frac{r}{2}sen\phi}r^3(\cos\phi sen\phi)zdzdrdu=6\int_0^{2\pi}\int_1^2\left(r^3(\cos\phi sen\phi)\frac{z^2}{2}\right)_0^{2-\frac{r}{2}sen\phi}drd\phi$$

$$3\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\cos\phi sen\phi\left(2-\frac{r}{2}sen\phi\right)^2drd\phi=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(\cos\phi sen\phi)\left(4-2rsen\phi+\frac{r^2}{4}sen^2\phi\right)drd\phi=0$$

(debido a ϕ)

0.8 Puntos