UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2012

(15/06/2012)

Pregunta 1.

Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, si & (x,y)\neq(0,0) \\ a \qquad\quad , si & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) **Determinar el valor de a para que la función sea continua en el origen**

b) **Para este valor de a calcular** $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$

c) **Hallar la derivada direccional** $D_u f(1,0)$, **siendo u un vector unitario que forma un ángulo de 60 con la parte positiva del eje OX, asumiendo diferenciabilidad de f.**

Solución:

a) Considerando la trayectoria T = $\{(x,y) \in R^2 / y = mx\}$ y evaluando el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} arctg\,\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} arctg\,\frac{x^4(1+m^4)}{x^2(1+m^2)} = 0 \quad \forall m$$

Así confirmar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Con la definición ó bien con las coordenadas polares:

$x = r\cos\theta,\ y = rsen\theta$

$$\lim_{r\to 0} arctg\,\frac{r^4(\cos^4\theta + sen^4\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} arctg\quad r^2(\cos^4\theta + sen^4\theta) = 0;\quad \forall\theta$$

Para que f(x,y) sea continua en (0,0) debe ocurrir que el límite anterior coincida con f(0,0), es decir, que a= f(0,0)

0.6 Puntos

b) Considerando f(0,0) = 0, se calculan las derivadas en el origen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{arctg\,\frac{h^4}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{arctgh^2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-0}{h}$$

$$\boxed{\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{arctg\,\frac{h^4}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{arctgh^2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-0}{h}=0$$

$$\boxed{\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$$

0.6 Puntos

c) Si se tiene en cuenta que $D_{\hat{u}}f(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\hat{u}$ .En primer lugar se determina el vector unitario $\hat{u}=(cos\,60^o\,,sen60^o)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ahora, calculando las componentes del gradiente.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2+(x^4+y^4)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\frac{2}{2}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2+(x^4+y^4)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\frac{0}{2}=0$$

Por lo tanto

$$\boxed{D_{\hat{u}}f(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\hat{u}=(1,0)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

0.8 Puntos

Pregunta 2.

Sea $f(u,v)$ **una función diferenciable en una vecindad $V_1(1,1)$ tal que** $f_u(1,1)=2$ **y** $f_v(1,1)=-2$**. Si** $x^2+2xy-u+v^3+yz-4=0$**;** $y^2+2xy-v+u^3-yz-2=0$**, definen** $u=u(x,y,z),\quad v=v(x,y,z)$ **u =u (x,y,z), en una vecindad $V_2(1,1,1)$. Determine f_x, f_y, f_z en (x,y,z) = (1,1,1).**

Solución:

$f_x = f_u u_x + f_v v_x,\quad f_y = f_u u_y + f_v v_y,\quad f_z = f_u u_z + f_v v_z,$

en que $u_x, v_x, u_y, v_y, u_z, v_z$ se obtienen derivando el sistema:

$F(x,y,z,u,v)=0,\quad G(x,y,z,u,v)=0$

derivadas valoradas en Po.

Sistema derivado:

$$\left.\begin{array}{c} 2x+2y-u_x+3v^2v_x=0 \\ 2y+3u^2u_x-v_x=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -u_x+3v^2v_x=-2x-2y \\ 3u^2u_x-v_x=-2y \end{array}\right| \Rightarrow$$

0.5 Puntos

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix} -2x-2y & 3v^2 \\ -2y & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3v^2 \\ 3u^2 & -1 \end{vmatrix}} \Rightarrow u_x(P_0)=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-5}{4}$$

$$v_x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2x-2y \\ 3u^2 & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3v^2 \\ 3u^2 & -1 \end{vmatrix}} \Rightarrow v_x(P_0)=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{4}$$

$$\left.\begin{array}{c} 2x-u_y+3v^2v_y+z=0 \\ 2y+2x+3u^2u_y-v_y-z=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -u_y+3v^2v_y=-2x-z \\ 3u^2u_y-v_y=-2x-2y+z \end{array}\right| \Rightarrow$$ En el Po se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c} -u_y+3v_y=-3 \\ 3u_y-v_y=-3 \end{array}\right| \Rightarrow\; u_y(P_0)=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-3}{2};\quad v_y(P_0)=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} -u_z + 3v^2 v_z + y = 0 \\ 3u^2 u_z - v_z - y = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -u_z + 3v_z = -1 \\ 3u_z - v_z = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$u_z(P_0) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1}{4}; \quad v_z(P_0) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}$$

0.8 puntos

Así:

$$\boxed{\begin{array}{l} f_x(P_0) = 2\left(\frac{-5}{4}\right) + (-2)\left(\frac{-7}{4}\right) = 1 \\ f_y(P_0) = 2\left(\frac{-3}{2}\right) + (-2)\left(\frac{-3}{2}\right) = 0 \\ f_z(P_0) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + (-2)\left(\frac{-1}{4}\right) = 1 \end{array}}$$

0.7 puntos

Pregunta 3.

Sea $f : U \subseteq \Re^2 \to \Re$ **definida en el abierto U, dada por** $f(x,y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$ **donde p es una constante entera. Calcular los valores extremos de la función.**

Indicación: Considere los distintos signos del parámetro p.

Solución:

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4px = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - p) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$4x(x^2 - p) = 0 \qquad \text{si} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 = p$$

Se tienen los siguientes puntos críticos:

$$\boxed{P_1 = (0,0) \quad \forall p \in Z} \ ; \ \boxed{P_2 = (-\sqrt{p},0) \quad P_3 = (\sqrt{p},0) \quad \text{si} \quad p \geq 0} \ ;$$

Observe que si p=0 existe un único punto crítico P1

1 punto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4p;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$$

$$H(x,y)=-8(3x^2-p)$$

0.2 puntos

Análisis de los puntos críticos:

Respecto a $P_1=(0,0)$

Si p>0:

H(0,0)=8p >0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0=-4p<0\Rightarrow$ máximo local en (0,0) con valor f(0,0)=3

Si p=0:

H(0,0)=0 $\Rightarrow$No entrega información.

Análisis de trayectorias:

$\vec{r1}(t)=(t,0),\quad f(\vec{r1}(t))=t^4+3$ Tiene mínimo en t=0

$\vec{r2}(t)=(0,t),\quad f(\vec{r2}(t))=-t^4+3$ Tiene máximo en t=0

Por lo tanto (0,0) es un punto de ensilladura

Si p<0:

H(0,0)<0 $\Rightarrow$ (0,0) es punto de ensilladura.

0.5 puntos

Respecto a $P_2=(-\sqrt{p},0);P_3=(\sqrt{p},0)$

Si p>0:

$H(P_2)=H(P_3)=-16p<0\Rightarrow$ Puntos de ensilladura

Si p=0:

$P_1=P_2=P_3$

Si p<0:

$P_2\notin R^2;P_3\notin R^2$

0.3 puntos

Resumen: Si p>0, existe un máximo local en (0,0) con valor f(0,0)=3 y dos puntos de ensilladura $(-\sqrt{p},0)$ y $(\sqrt{p},0)$. Si $p\leq 0$, existe un unico punto crítico (0,0) que es punto de ensilladura.