UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2011

(02/06/2011)

Problema 1.

Dada la función f: $D \subset \Re^2 \to \Re$ **definida como:**

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,sen\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determinar si f es continua en (0,0)

b) Obtener $f_x(0,0)$ $f_y(0,0)$

c) Calcular $f_x(x,y)$ **para** $(x,y) \neq (0,0)$.

d) Establecer si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

a)

i) Se tiene $f(0,0) = 0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\,sen\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ porque $y \to 0$ y $\left| sen\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1$ ó bien

de otra manera:

$$\left| y\,sen\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = x^2+y^2 < \varepsilon \qquad \text{si } \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$$

Entonces f es continua en (0,0)

0.5 puntos

b)

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0\,sen\dfrac{0}{\sqrt{(\Delta x)^2}} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y sen \frac{0}{\sqrt{(\Delta y)^2}} - 0}{\Delta y} = 0$$

0.5 puntos

c)

$$f_x(x,y) = y\cos\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, y \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{2x}{x\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = y^2\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{y^4}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

0,5 puntos

d)

Determinamos $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta y sen \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} - 0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$; se cumple

$$\left| \frac{\Delta y sen \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} - 0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right| \le \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} < \varepsilon \text{ con}$$

$\delta = \varepsilon$, Se usaron desigualdades:

$$|\Delta x| \le \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}, \quad |\Delta y| \le \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}, \quad |sen\alpha| \le |\alpha|, \quad si \quad \alpha \to 0$$

Así $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$ y f es diferenciable en (0,0)

0,5 puntos

Problema 2.

a) **Probar que el sistema:** $\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=9 \\ xy+z=0 \end{array}\right|$ **define implícitamente x=x(z) e y=y(z) en la vecindad V(2,1,-2).**

b) **Si** $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),t)$ **denota la ecuación paramétrica de la curva definida por el sistema anterior. Calcular la recta tangente y el plano normal en el punto (2,1,-2).**

Solución:

a)

Para $\left.\begin{array}{c} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0 \\ G(x,y,z)=xy+z=0 \end{array}\right|$ se verifica

i) $F(2,1,-2)=2^2+1^2+(-2)^2-9=0,\quad G(2,1,-2)=2\cdot 1-2=0$

ii) $F_x=2x \quad F_y=2y \quad F_z=2z;\quad G_x=y \quad G_y=x \quad G_z=1;$ Continuas en V(2,1,-2).

iii) $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix}=2x^2-2y^2;$ en Po=(2,1,-2), $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)=6\neq 0$ Entonces el sistema define las funciones x=x(z), y=y(z) diferenciables en V(2,1,-2).

0.8 puntos

b)
Derivando el sistema respecto a z se obtienen:

$$\begin{array}{c} 2xx'(z)+2yy'(z)+2z=0 \\ x'(z)y+xy'(z)+1=0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} xx'(z)+yy'(z)=-z \\ yx'(z)+xy'(z)=-1 \end{array}\right|$$ que determinan:

$$x'(z)=\frac{\begin{vmatrix} -z & y \\ -1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{-xz+y}{x^2-y^2},\qquad y'(z)=\frac{\begin{vmatrix} -x & -z \\ y & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{-x+yz}{x^2-y^2}$$

0.3 puntos

b) De a)

$\vec{r}(z)=(x(z),y(z),z),\quad \vec{r}\,'(z)=(x'(z),y'(z),1);$ en Po=(2,1,-2) $\vec{r}\,'(-2)=(x'(-2),y'(-2),1)$

$$\vec{r}\,'(-2)=\left(\frac{4+1}{4-1},\frac{-2-2}{4-1},1\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{-4}{3},1\right)$$

0.5 puntos

c) La ecuación de la recta tangente es:

$$\vec{R}(\lambda) = (2,1,-2) + \lambda\left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, 1\right),\ \lambda \in \Re \leftrightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$$

0.2 puntos

d) La ecuación del plano normal es:

$$\left(\vec{R} - (2,1,-2)\right) \circ (5,-4,3) = 0 \leftrightarrow 5x - 4y + 3z = 0$$

0.2 puntos

Problema 3.

Determinar todos los valores extremos de la función:

$$f(x,y)=x^3-3xy^2-3x^2-3y^2+4$$

En la región $D=\{(x,y)\in\Re^2 / x^2+y^2\leq 1\}$

Solución:

a) Para $f(x,y)=x^3-3xy^2-3x^2-3y^2+4 \quad con \quad (x,y)\in D: x^2+y^2\leq 1$ **se tiene:**

i) Condición necesaria:

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(0,0)\Rightarrow \left.\begin{array}{r}3x^2-3y^2-6x=0\\ -6xy-6y=0\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x^2-y^2-2x=0\\ 6y(x+1)=0\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}x=-1\vee y=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}\\ x=0 \ \ , \ x=2\end{array}$$

Se obtienen $P_1=(-1,\sqrt{3}) \quad P_2=(-1,-\sqrt{3}) \quad P_3=(0,0) \quad P_4=(2,0)$ de los cuales sólo $P_3=(0,0)$ pertenece al interior del dominio D: $0^2+0^2\leq 1$.

ii) Para este punto $P_3=(0,0)$ el hessiano $H(x,y)$ con:

$f_{xx}=6x-6 \quad f_{xy}=-6y \quad f_{yy}=-6x-6$ es:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}6(x-1) & -6y\\ -6y & -6(x+1)\end{vmatrix} \quad en \quad P_3 \quad es \quad H(0,0)=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=36>0$$

y $f_{xx}(0,0)=-6<0$ Determina $f(0,0)=4$ valor máximo de f en V(0,0); los otros 3 puntos se descartan por que no pertenecen al interior de D.

1 punto

b)

En la frontera de D, $F(D)=\{(x,y)\in\Re^2 / x^2+y^2=1\}$ se tiene,

$f(x,y(x))=x^3-3x(1-x^2)-3+4=4x^3-3x+1$ con

$f'(x)=12x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2} \quad y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ con lo cual:

$P_5=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad P_6=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad P_7=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad P_5=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ son nuevos puntos críticos de f.

De $f''(x)=24x \quad f''(\frac{1}{2})=12>0$ determina

$f(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}+1=0$ valor mínimo de f y $f(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}+1=2$ valor máximo de f.

También considerando parametrización de $x^2+y^2=1$

$x(t)=\cos t \quad y(t)=sent \quad t\in[0,2\pi]$ se tiene:

$f(x(t),y(t))=\cos^3 t-3\cos t\cdot sen^2 t+1$ con $f'(t)=3sen^3 t-9sent\cos^2 t$

Los puntos críticos (-1,0) y (1,0) con f(1,0) =2 valor máximo y f(-1,0) valor mínimo.

1 punto