PEP1 Cálculo Avanzado
12/10/2012

1. Dada la función $f(x) = |sen(2x)|$; $\frac{-\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
   a) Obtener la Serie de Fourier de f(x).
   b) Determine la convergencia de la Serie de Fourier para todo $x \in R$. (Justifique su respuesta)
   c) Use b) para calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)}$
   d) Deduzca el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(16n^4-8n^2+1)}$

   Indicación: $\boldsymbol{sen(\alpha)cos(\beta)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{sen(\alpha+\beta)} + \boldsymbol{sen(\alpha-\beta)})$

Solución:

Como f(x) es función par los coeficientes son:

a)

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{4}{\pi}} (sen(x))^2\,dx = \left(-\frac{2}{\pi}\cos(2x)\right)\Big|_0^{\frac{4}{\pi}} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{4}{\pi}} sen(2x)\cos(4nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{4}{\pi}}\Big(sen\big((2+4n)x\big) + sen\big((2-4n)x\big)\Big)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos((2+4n)\,x)}{2+4n}\Big|_0^{\frac{4}{\pi}} - \frac{\cos((2-4n)\,x)}{2-4n}\Big|_0^{\frac{4}{\pi}}\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2+4n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)-1\right) + \frac{1}{2-4n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)-1\right)\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}[\frac{1}{2+4n} + \frac{1}{2-4n} = \frac{4}{\pi}\,\frac{4}{4-16n^2}$$

$$= \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$$b_n = 0$$

Así la serie de Fourier de f(x) es:

$$S_{f(x)} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(4nx)$$

1,2 pts.

b) Como f(x) es continua para todo $x \in R$ entonces esta serie es convergente a f(x) para todo $x \in R$.

0,2 pts.

c) En particular en $x_0 = 0$ se tiene la convergencia

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} = f_{(0)} = 0$$

y de esto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n^2-1)} = \frac{1}{2}$$

0,3 pts.

d) Con identidad de Parseval $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2 dx = 2\,{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$, se tiene:

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{4}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} f(x)^2 dx = \frac{8}{\pi}\int_{0}^{\frac{4}{\pi}} (sen(2x))^2 dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{4}{\pi}} (1-\cos(4x))dx = \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{4} - \frac{sen(4x)}{4}|_0^{\frac{4}{\pi}} = 1$$

A su vez igual a

$$2\frac{4}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2}$$

Finalmente

$$\frac{1-\frac{8}{\pi^2}}{16}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^4 - 8n^2 + 1} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

0,3 pts.

2.- Dada la function $f(x) = \begin{cases} E\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right);\ si\ |x| < 2 \\ 0\ ;\ si\ |x| > 2 \end{cases}$

a) Determine la integral de Fourier para f(x).
b) Determine la convergencia de la integral anterior para todo $x \in R$. Justifique su respuesta).
c) Deduzca que $2\int_0^\infty \frac{sen(w)\cos(w)^2}{w}dw = \int_0^\infty (1-\cos(2w))\frac{sen(w)}{w}dw$

Indicación:
$E(x) = [x] = \text{Función parte entera de x} = \text{mayor entero menor o igual a x.}$
$\text{Ejemplo: E}(3{,}02) = 3; [0{,}21] = 0$

Solución:

De $f(x) = \begin{cases} E\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right);\ si\ |x| < 2 \\ 0\ ;\ si\ |x| > 2 \end{cases}$, se tiene:

$|x| < 2 \ \rightarrow\ -2 \le x \le 2 \ \rightarrow\ -\pi \le \frac{\pi}{2} \le \pi$

$$\rightarrow\ f(x) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \le x \le 2 \\ 1, & si\ x = 1 \\ -1, & si -2 < x < 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

0,3 pts.

La integral de f es

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \big(A(w)\cos(wx) + B(w)sen(wx)\big)dw$$

Con

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv = \int_{-2}^{\infty}(-\cos(wx))dv = (\frac{-sen(wv)}{w}|_{-2}^{0} = -\frac{sen(2w)}{w}$$

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)sen(wv)dv = \int_{-2}^{\infty}(-\operatorname{sen}(wx))dv = (\frac{cos(wv)}{w}|_{-2}^{0} = \frac{1-cos(2w)}{w}$$

Así la integral de f es:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\left(-\frac{sen(2w)}{w}\right)\cos(wx) + \left(\frac{1-cos(2w)}{w}\right)sen(wx)\right)dw$$

1,0 pts.

Para todo $x \in R$ con $x \neq -2{,}0{,}1$ la integral converge a f(x) por ser continua.

En $x_1 = -2$, $f_-(-2) = -1$, $f_+(-2) = -1$ y en $x_2 = 0$, $f_-(0) = -1$, $f_+(0) = -1$
En $x_3 = 1$, $f_-(1) = 0$, $f_+(1) = 0$ y la integral converge a 0.

0,2 pts.

De lo cual se obtiene que

$$2\int_0^{\infty} \frac{sen(w)\cos{(w)}^2}{w} dw = \int_0^{\infty} (1 - \cos(2w)) \frac{sen(w)}{w} dw$$

0,5 pts.

3.- Sea C curva dada por su ecuación vectorial paramétrica $\vec{r}(t) = (2t-1, 2-t^2, \ln(t)), t > 0$

a) Obtener los vectores $\hat{T}(t), \hat{B}(t), \hat{N}(t)$ en el punto $P_0 = (1,1,0)$.

b) determinar la longitud de C desde $P_0 = (1,1,0)$ hasta $P_1 = (2e-1, 2-e^2, 1)$.

c) Determinar la ecuación de plano osculador en $P_0 = (1,1,0)$.

d) Calcular curvatura y torsión en punto $P_0 = (1,1,0)$.

Solución:

De $\vec{r}(t) = (2t-1, 2-t^2, \ln(t))$, $t > 0$ $\rightarrow$ con $t = 1$, $\vec{r}(t) = (1,1,0)$

a) $\vec{r}'(t) = \left(2, -2t, \frac{1}{t}\right) \rightarrow \vec{r}'(t) = (2,-2,1)$; $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\left(4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}\right)} = \sqrt{(\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2)}$

$= 2t + \frac{1}{t}$, porque $t > 0$; $\vec{r}'(1) = 3$ y $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{1}) = \left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\right)$.

$\vec{r}''(t) = \left(0, -2, \frac{-1}{t^2}\right)$; $\vec{r}''(1) = (0,-2,-1)$; $\vec{r}'(1) \text{ x } \vec{r}''(1) = (4,2,-4)$;

$\| \vec{r}'(1) \text{ x } \vec{r}''(1)\| = \sqrt{(16+4+16)} = 6$ y $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{1}) = (\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{3}})$

$\hat{N}(1) = \hat{B}(1) \text{ x } \hat{T}(1) = \left(\frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{3}}\right) = \hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{1})$

1,0 pts.

b)

$$L(C) = \int_1^e \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = [t^2 + \ln(t)]|_1^e = e^2 + 1 - 1 = e^2 \quad \rightarrow \quad e^2 = L(C)$$

(Desde $P_0 = \vec{r}(1)$ a $P_1 = \vec{r}(e) = (2e-1, 2-e^2, 1)$)

0,4 pts.

c)

$$K(1) = \frac{\| \vec{r}'(1) \ x \ \vec{r}''(1) \|}{\|\vec{r}'(1)\|^3} = \frac{6}{3^3} = \frac{2*3}{3^3} = \frac{2}{9}$$

$$\tau(t) = \frac{[\vec{r}'(t) \, x \, \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t)]}{\|\vec{r}'(t) \, x \, \vec{r}''(t)\|^2} \quad ; \quad \vec{r}'''(t) = \left(0,0,\frac{2}{t^3}\right) \ y$$

$$\tau(t) = \frac{[\vec{r}'(1) \, x \, \vec{r}''(1) \cdot \vec{r}'''(1)]}{\|\vec{r}'(1) \, x \, \vec{r}''(1)\|^2} = \frac{(0,2,-4)\cdot(0,0,2)}{6^2} = \frac{-2}{9}$$

0,4 pts.

d) Con ecuación de plano osculador

$$\left(\vec{R} - \vec{r}(1)\right) \cdot \left(\vec{r}' \text{x} \ \vec{r}''(1)\right) = 0$$

Se tiene:

$$\left(\vec{R} - (1,1,0)\right) \cdot (4,2,-4) = 0$$
$$\vec{R} \cdot (4,2,-4) = 6$$
$$\boldsymbol{2x + y - 3z = 3}$$

0,2 pts.