UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA . DEPTO DE MATEMATICA Y C.C.
PRIMERA PRUEBA DE CALCULO AVANZADO
Ingenieria Civil .Segundo semestre 2011

Pauta de Corrección

Problema 1.-

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right) & si \quad |x| < a \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$

a) Obtener la integral de Fourier de f.

b) Deducir que $1 - x = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\infty \dfrac{1 - \cos w}{w^2} \cos wx dw$, si $0 \leq x \leq 1$; y

$\int_0^\infty \dfrac{1 - \cos w}{w^2} \cos wx \; dw = 0$, si $x > 1$.

Solución

a) Como:

$f(-x) = \left(1 - \dfrac{|-x|}{a}\right) = \left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right) = f(x) \;\; \forall x \in [-a, a]$

la función f es par, entonces la integral de Fourier de f es

$\int_0^\infty A(w) \cos(wx) \, dx$, con coeficiente:

$A(w) = \dfrac{2}{\pi} \left[\int_0^a \left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \cos(wx) \, dx + \int_a^\infty 0 \cos(wx) \, dx \right]$

$A(w) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^a \left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \cos(wx) \, dx$

$A(w) = \dfrac{2}{\pi} \left(\dfrac{1 - \cos aw}{aw^2} \right)$

Por tanto la integral de Fourier queda

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1 - \cos aw}{aw^2} \right) \cos(wx) \, dx,$$

b) Como la funciòn f es continua para $\forall x \in [0, 1]$,aplicando el teorema de convergencia con $a = 1$, se deduce que la integral de Fourier converge a

$f(x) = 1 - x = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\infty \dfrac{1 - \cos w}{w^2} \cos wx dw$, y del mismo modo

$f(x) = 0 = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\infty \dfrac{1 - \cos w}{w^2} \cos wx dw$, $\forall x > 1$

Problema 2.-

Sea la hélice $\overrightarrow{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $b \neq 0$, determine:

a) los valores de a y b si su curvatura es $\kappa(t) = \dfrac{1}{5}$ y su torsión $\tau(t) = \dfrac{2}{5}$.

b) La ecuación del cilíndro sobre el cuál se encuentra la hélice.

Solución

a) En primer lugar determinemos la curvatura la torsión en función del tiempo:

$\overrightarrow{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \ \ \forall t \in IR \implies \|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$
$\overrightarrow{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$
$\overrightarrow{r}'''(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0)$
$\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t) = \left(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right) \implies \|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\| = a\sqrt{a^2+b^2}$
$\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t) \cdot \overrightarrow{r}'''(t) = \left(-a^2 b\sin^2 t, -a^2 b\cos^2 t, 0\right)$
Entonces, se tiene

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\right\|}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}, \text{ y}$$

$$\tau(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t) \cdot \overrightarrow{r}'''(t)\right\|}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|^{3/2}} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Luego, a partir de los valores dados de curvatura y torsión, obtenemos

$$\frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{5}, \ \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{2}{5} \implies a = 1, b = 2$$

Por tanto la ecuación de la hélice es $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$

b) A partir de la ecuaciónes paramétricas de la hélice , se tiene
$x = cost, y = sint, z = 2t \geq 0 \implies x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0$, corresponde a un cilindro de radio $r = 1$, cuyo eje axial coincide con el eje z.

Problema 3.-

Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
a) estudie la continuidad de f en todo IR^2
b) calcular $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ y $f_x(x,y)$ con $(x,y) \neq (0,0)$
c) estudie la derivada direccional de f en $(0,0)$ en dirección cualquiera $\widehat{u} = (a,b)$ con$\sqrt{a^2+b^2} = 1$
d) determine si f es diferenciable en $(0,0)$.
Solución
(a) En los puntos de IR^2 distintos de $(0,0)$ la función es continua por ser cuociente de funciones continuas con denominador no nulo.
En $(0,0)$ estudiemos la continuidad de f:
i) Existe $f(0,0) = 0$
ii) Estudiemos el limite

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} f(x,y) = \underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

Al usar coordenadas polares se tiene

$$\begin{aligned} \underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\left(r^2\cos\theta\sin\theta\right)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

Puesto que $\sin\alpha \simeq \alpha$ si $\alpha \to 0$,y $\theta \in [0, 2\pi]$, $-1 < cos^2\theta \sin\theta < 1$,en el último límite se tiene que el producto de una cantidad infinitésimal por una función acotada es cero.
Por lo tanto la función es continua en todo IR^2
b) Las derivadas parciales $\forall (x,y) \neq (0,0)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{[\sin(xy) + xy\cos(xy)]\left(x^2+y^2\right) - 2x\,[x\sin(xy)]}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\left[x^2\cos(xy)\right]\left(x^2+y^2\right) - 2y\,[x\sin(xy)]}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Además, las derivadas parciales para $(x,y) = (0,0)$ son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\sin 0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0\sin 0}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto las derivadas parciales de primer orden existen en todo IR^2
c) Calculamos la derivada direccional en cualquier dirección $\widehat{u} = (a,b)$ tal que $\|\widehat{u}\| = \sqrt{a+b} = 1$utilizando, la definición

$$\begin{aligned} D_{\widehat{u}}f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{ta\sin\left(t^2ab\right)}{t^2} - 0}{t} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{ta\left(t^2ab\right)}{t^2} - 0}{t} \\ D_{\widehat{u}}f(0,0) &= a^2b \end{aligned}$$

Por tanto, existe la derivada direccional de la función f en el origen en cualquier dirección $\widehat{u} = (a,b)$.
d) Examinemos si función es diferenciable en el origen.
Utilizando la definición de diferenciabilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)\,h - f_y(0,0)\,k}{\|(h,k)\|} &= \\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h\sin(hk)}{h^2+k^2} - 0 - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\sin(hk)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Calculemos este límite utilizando coordenadas polares

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\sin(hk)}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin\left(r^2\cos\theta\sin\theta\right)}{r^3} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\left(r^2\cos\theta\sin\theta\right)}{r^3} \\ &= \cos^2\theta\sin\theta \neq 0 \end{aligned}$$

El límite no es cero y por lo tanto la función no es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 4.-
Dada $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z - 1 = 0$
a) Verificar si $F(x,y,z) = 0$ define en el punto $P(0,-1,0)$ a z como función implícita de x e y, es decir, $z = f(x,y)$
b) Calcular $z_x\left(0,-1\right), z_y\left(0,-1\right), z_{xx}\left(0,-1\right) \;\; y \;\; z_{yy}\left(0,-1\right).$

Solución
a) $F(x,y,z) = 0$ define a $z = f(x,y)$ en una vecindad de $P(0,-1,0)$ si:
i) El punto P es un punto de la superficie, es decir, $F(0,-1,0) = 0$.
En efecto, al evaluar $F(0,-1,0) = 0 + 1 + 0 + 0 + 0 - 1 = 0$.
ii) F_x, F_y, F_z son continuas en una vecindad de P.
En efecto:
$F_x(x,y,z) = 2x + y \;\;, F_y(x,y,z) = 2y + x,\; F_z(x,y,z) = 2z + 2$
son funciones polinómicas y estas son continuas en IR^2.
iii) Además, se debe cumplir $F_z(0,-1,0) \neq 0$
Como $F_z(x,y,z) = 2z + 2$ entonces$F_z(0,-1,0) = 0 + 2 = 2 \neq 0$.
El teorema de la función implícita garantiza una vecindad $V(0,-1)$ en la cual podemos definir una función $z = f(x,y)$ tal que $F\left(x,y,f(x,y)\right) = 0$.

b) La función tiene derivadas continuas en $V(0,-1)$ que pueden calcularse por:

$$1)\; z_x\left(x,y\right) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2x+y}{2z+2} \implies z_x(0,-1) = -\frac{F_x(0,-1,0)}{F_z(0,-1,0)} = \frac{1}{2}$$

$$2)\; z_y\left(x,y\right) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2y+x}{2z+2} \implies z_y(0,-1) = -\frac{F_y(0,-1,0)}{F_z(0,-1,0)} = 1$$

Para calcular las derivadas de segundo orden basta derivar (1) y (2) respecto a x e y respectivamente:

$$z_{xx}\left(x,y\right) = -\frac{\left[(2z+2)2 - (2x+y)\left(2z_x\right)\right]}{(2z+2)^2} \implies z_{xx}(0,-1) = -\frac{5}{4}$$

$$z_{yy}\left(x,y\right) = -\frac{\left[(2z+2)\,2 - (2y+x)\left(2z_y\right)\right]}{\left(2z+2\right)^2} \implies z_{yy}(0,-1) = -2$$