UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2012
(04/05/2012)

Problema 1:

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\pi-|x|\,,si & |x|<\pi\\ \dfrac{\pi}{2}\quad ,si & x=\pm\pi\end{cases}$

a) **Obtener la representación de f(x) en serie de Fourier.**

b) **Analizar la convergencia de la serie de** $\Re$.

c) **Use a) para calcular la suma de la serie** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$

Indicación:

$$\int x\cos axdx=\frac{x}{a}senax+\frac{1}{a^2}\cos ax$$
$$\int xsenaxdx=-\frac{x}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}senax$$

Solución:

a) La función $f(x)$ es par, ya que $f(x)=\pi-|x|$, $f(-x)=\pi-|-x|=f(x)$. Entonces su serie de Fourier tiene coeficientes:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi\cos nxdx-\int_0^{\pi}x\cos nxdx\right)=$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi sennx}{n}\Big|_0^{\pi}-\left(\frac{x}{n}sennx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(0-0-\frac{1}{n^2}(\cos n\pi-1)\right)=$$

$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)$ y $\boxed{b_n = 0}$; también $\boxed{a_n = \frac{4}{(2n-1)^2\pi}}$

Así la serie de Fourier es:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} \cos nx}$$

1 punto

b) Se tiene convergencia de la serie $\forall x \in \Re$, de acuerdo a teorema y la convergencia es a $f(x)$ si $x \in \Re - \{k\pi\},\ k \in Z$ y a 0 si $x = k\pi, k \in Z$.

0.4 puntos

c) Con identidad de Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2a_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$$

Se tiene:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^4\pi^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - 2\pi x + x^2)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{x^3}{3}\right)_0^{\pi} =$$
$$\frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \pi^3 + \frac{\pi^3}{3}\right)$$

Luego:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

0.6 puntos

Problema 2:

a) **Demuestre que** $e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw$ **con** $0 < x < \infty$

b) **Use a) para representar** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ **como una integral de Fourier coseno, intercambiando las variables w por x.**

Indicación:

$$\int e^{ax}\cos px\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\,sen px)}{a^2+p^2}$$

Solución:

Considerando extensión para $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$, a $(-\infty,\infty)$, se determina:

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos wx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[e^{-x}(-\cos wx + w\,sen wx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+w^2};$$

Así:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw$$

1.4 puntos

Se requiere:

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw\ ,$$

con $A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+x^2}\,dx$ de a) se tiene $e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+x^2}\,dw$, en la cual intercambiando w por x se tiene:

$$e^{-w} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+x^2}\,dx,$$

de lo cual $A(w)=e^{-w}$ y así la representación de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ como integral de Fourier coseno pedida es:

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-w}\cos wx\,dw}$$

0.6 puntos

Problema 3:

Dada la curva $\vec{r}(t)=\left(1-\frac{1}{t},-t,t-\frac{1}{t}\right)$**, t>0.**

a) Obtener la ecuación de la recta tangente en el punto $P_0=\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)$**.**

b) Obtener la ecuación del plano osculador en el punto $P_0=\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)$**.**

c) Determinar que la curva es plana y obtener la ecuación del plano en que reside la curva.

Solución: a)

La dirección de la tangente es dada por: $\vec{r}\,'(t)$;

La ecuación de la recta tangente es: $R(\lambda)=\vec{r}(t_0)+\lambda\,\vec{r}\,'(t_0),\quad \lambda\in\Re.$

Se tiene $\vec{r}\,'(t)=\left(\frac{1}{t^2},-1,1+\frac{1}{t^2}\right),\quad P_0=\vec{r}(2)$, así la recta tangente es de ecuación:

$$\boxed{R(\lambda)=\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)+\lambda\left(\frac{1}{4},-1,\frac{3}{4}\right)}$$

O bien de forma cartesiana:

$$\boxed{\frac{x-1/2}{1/4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3/2}{5/4}=\lambda}$$

0.6 puntos

b) El plano osculador es de ecuación: $\left(\vec{R}-\vec{r}(t_0)\right)\circ B(t_0)=0$

o bien, $\left(\vec{R}-\vec{r}(t_0)\right)\circ\left(\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right)=0$. Se tiene, $\vec{r}\,'(t)=\left(\frac{1}{t^2},-1,1+\frac{1}{t^2}\right)$;

$\vec{r}\,''(t)=\left(\frac{-2}{t^3},0,\frac{-2}{t^3}\right)\Rightarrow\quad \vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=\left(\frac{-2}{t^3}\right)(-1,1,1)\quad y\quad \vec{r}\,'(2)\times\vec{r}\,''(2)=\left(\frac{-1}{4}\right)(-1,1,1)$.

Así la ecuación del plano osculador pedido es:

$$\left(\vec{R}-\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)\right)\circ\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4},\frac{-1}{4}\right)=0\Leftrightarrow\left(\vec{R}-\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)\right)(1,-1,-1)=0$$

o bien:

$$\boxed{x-y-z=\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}=1}$$

0.7 puntos

c) Con $\vec{r}\,'''(t)=\left(\frac{6}{t^4},0,\frac{6}{t^4}\right)$, el producto mixto.

$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\circ\vec{r}\,'''(t)=\frac{-1}{t^7}(-1,1,1)\circ(1,0,1)=0$, y por fórmula $\tau=0,\quad\forall t;$ entonces la curva es plana y reside en el plano osculador.

$$\boxed{x-y-z=1}$$

0.7 puntos