UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2011
(29/04/2011)

Problema 1.

Obtener la serie de Fourier $f(x) = x - x^2$, $0 < x < 1$, **función periódica de periodo 2.**

Del resultado anterior deducir la convergencia de las series:

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Solución:

Considerada la extensión para de $f(x) = x - x^2$, $0 < x < 1$, a intervalo (-1,1), p=1, la serie de coseno es:

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

Con:

$$a_0 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (x - x^2)\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 x \cos n\pi x dx - 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx =$$

$$a_n = 2\left[\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{x}{n\pi} senn\pi x\right)_0^1 - \left(\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \left(\frac{x^2}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) senn\pi x\right)_0^1\right] =$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) - \frac{4\cos n\pi}{n^2\pi^2} = -\frac{2}{n^2\pi^2}(1 + \cos n\pi)$$

$$\boxed{a_n = -\frac{2}{n^2\pi^2}(1 + \cos n\pi), \quad n \neq 0, \quad b_n = 0}$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}(1+(-1)^n) = \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2\pi^2}, & si \quad n \quad es \quad par \\ 0 \quad , & si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$$

0.4 puntos

Así $E_p(f(x))$ tiene serie de Fourier (serie coseno de f(x)),

$$\boxed{\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{(2n)^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi x}$$

0.4 puntos

Convergencias: como $E_p(f(x))$ es continua $\forall x \in (-1,1)$ en $x_0 = 0$ se tiene por teorema de convergencia puntual,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = f(0) = 0 \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

0.4 puntos

Con identidad de Parseval:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx = 2a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$$

Se tiene, p=1,

$$\int_{-1}^{1}(x-x^2)^2\,dx = 2\int_{-1}^{1}(x-x^2)^2\,dx = 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4\pi^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} - \frac{1}{18} = \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{3\pi^4}{15\cdot 18} = \frac{\pi^4}{90}}$$

0.4 puntos

Problema 2.

Dada la curva C descrita por $\vec{r}(t) = (\sqrt{6}\cos t, 4sent, \sqrt{10}\cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

a) Calcular su longitud L.

b) Reparametrizarla de forma $\vec{r} = \vec{r}(s)$ con s parámetro longitud de arco indicando el intervalo del dominio s.

c) Obtener los escalares κ y τ (curvatura y torsión) en cada punto de C.

d) Verificar que C está en una superficie esférica y en una superficie plana.

Solución:

a) De:

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{6}\cos t, 4sent, \sqrt{10}\cos t) \Rightarrow$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sqrt{6}sent, 4\cos t, -\sqrt{10}sent),$$

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = \left(6sen^2 t + 16\cos^2 t + 10sen^2 t\right)^{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \int_0^{2\pi} 4dt = 4t\Big|_0^{2\pi} = 8\pi}$$

0.5 puntos

b) De $s(t) = \int_0^t 4dt = 4t \Rightarrow t = \frac{s}{4}$ y C queda representada por:

$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{6}\cos\frac{s}{4}, 4sen\frac{s}{4}, \sqrt{10}\cos\frac{s}{4}\right),$$

0.3 puntos

Con $0 \le s \le 8\pi$ (intervalo de s)

0.2 puntos

c) Con

$$\vec{r}\,''(t) = (-\sqrt{6}\cos t, -4sent, -\sqrt{10}\cos t)$$

$$\vec{r}\,'''(t) = (\sqrt{6}sent, -4\cos t, \sqrt{10}sent)$$

Se obtienen:

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=(-4\sqrt{10},0,4\sqrt{6})$$

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right\|=16$$

Así:

$$\boxed{\kappa(t)=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}(cte)};\ \forall t;$$

0.3 puntos

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\circ\vec{r}\,'''(t)=0 \text{ y } \tau(t)=0 \quad \forall t$$

0.2 puntos

d) De c) se deduce que C está en esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=16$ y en plano de ecuación $\sqrt{10}x-\sqrt{6}y=0$

De manera alternativa c) se puede desarrollar a partir de:

$\vec{r}(s)=\left(\sqrt{6}\cos\frac{s}{4},4sen\frac{s}{4},\sqrt{10}\cos\frac{s}{4}\right)$, con lo cual

$$\frac{d\,\vec{r}(s)}{ds}=T(s)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}sen\frac{s}{4},\cos\frac{s}{4},\frac{-\sqrt{10}}{4}sen\frac{s}{4}\right),$$

$$\frac{dT(s)}{ds}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{16}\cos\frac{s}{4},-\frac{1}{4}sen\frac{s}{4},\frac{-\sqrt{10}}{16}\cos\frac{s}{4}\right)=\kappa(s)N(s)$$

Con lo cual

$$\left\|\frac{dT(s)}{ds}\right\|=k(s)=\frac{1}{4};\quad N(s)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\cos\frac{s}{4},-sen\frac{s}{4},\frac{-\sqrt{10}}{4}\cos\frac{s}{4}\right)$$

$$con\quad B(s)=T(s)\times N(s)=\left|\begin{matrix}-\frac{\sqrt{6}}{4}sen\frac{s}{4},\cos\frac{s}{4},\frac{-\sqrt{10}}{4}sen\frac{s}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}\cos\frac{s}{4},-sen\frac{s}{4},\frac{-\sqrt{10}}{4}\cos\frac{s}{4}\end{matrix}\right|$$

$$\left(\frac{-\sqrt{10}}{4},0,\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

Vector constante y $\frac{dB(s)}{ds}=(0,0,0)\Rightarrow\tau(t)=0$ **0.5 puntos**

Problema 3.

a) **Una partícula se desplaza de manera que $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t > 0$ es su ubicación en cada instante con rapidez constante. Deducir que sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales $\forall t$.**

b) **Verificar esta propiedad para el desplazamiento dado por $\vec{r}(t) = (a\cos t, asent, bt),\ t > 0$ con a y b constantes reales positivas.**

Solución :

a) Dada la trayectoria $\vec{r} = \vec{r}(t)$, en cada instante t su velocidad está dada por $\vec{r}\,'(t)$, su aceleración por $\vec{r}\,''(t)$ y su rapidez por $\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = c = cte.$ **0.2 puntos**

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = c = cte. \Leftrightarrow \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|^2 = c^2 \Leftrightarrow \vec{r}\,'(t)\circ\vec{r}\,'(t) = c^2$$ **0.5 puntos**

Derivando:

$$\vec{r}\,'(t)\circ\vec{r}\,''(t) + \vec{r}\,''(t)\circ\vec{r}\,'(t) = 0$$
$$2\,\vec{r}\,'(t)\circ\vec{r}\,''(t) = 0$$

0.5 puntos

Como el producto interno (punto) entre los vectores velocidad y aceleración es 0 en cada instante t, estos dos vectores son ortogonales $\forall t$. **0.3 puntos**

Solucion alternativa:

Dada la trayectoria $\vec{r} = \vec{r}(t)$, en cada instante t su velocidad está dada por $\vec{r}\,'(t)$, su aceleración por $\vec{r}\,''(t)$ y su rapidez por $\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = c = cte.$ **0.2 puntos**

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \vec{T}\cdot s'$, donde s es el parámetro por longitud de arco. **0.3 puntos**

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{T}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{T}\cdot\frac{d^2 s}{dt^2},$$

0.2 puntos

Pero $\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = s''(t) = 0$ ya que $s'(t) = \left\| \vec{r}'(t) \right\| = c = cte.$

0.3 puntos

y $\frac{d\vec{T}}{ds} = k\,\vec{N}$

0.2 puntos

Por lo tanto $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 (\vec{N} \bullet \vec{T}) + \frac{d^2 s}{dt^2}(\vec{T} \bullet \vec{T}) = k \cdot c^3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Como el producto interno (punto) entre los vectores velocidad y aceleración es 0 en cada instante t, estos dos vectores son ortogonales $\forall t$.

0.3 puntos

b) Dada la trayectoria $\vec{r}(t) = (a\cos t, asent, bt)$, su velocidad está dad por $\vec{r}'(t) = (-asent, a\cos t, b)$, y su aceleración por $\vec{r}''(t) = (-a\cos t, asent, 0)$,

0.1 puntos

Primero verifiquemos si la trayectoria dada satisface la hipótesis que su rapidez es constante, es decir, $\left\| \vec{r}'(t) \right\| = c = cte.$

$\left\| \vec{r}'(t) \right\| = \sqrt{(-asent)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = cte$ ya que a y b son constantes reales positivas.

0.2 puntos

$\vec{r}'(t) \bullet \vec{r}''(t) = (-asent, a\cos t, b) \bullet (-a\cos t, -asent, 0) = a^2 sent\cos t - a^2 sent\cos t + 0 = 0$

0.1 puntos

Como para este desplazamiento de rapidez constante el producto interno (punto) entre los vectores velocidad y aceleración es 0 en cada instante t, estos dos vectores son ortogonales $\forall t$ y se verifica la propiedad demostrada en a).

0.1 puntos