UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRUEBA POR DE CÁLCULO AVANZADO
Ingeniería Civil, Primer Semestre 2012
20/07/2012

PAUTA

Problema 1

Sea C una curva definida por la intersección de las superficies

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$z = x^2 + y^2$$

a) Parametrizar la curva C de la forma $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right), t \in [a,b]$
b) Determinar la curvatura de C en cada punto y obtener todos los puntos de C en que la curvatura es máxima o mínima
c) Calcular el volumen comprendido entre las superficies dadas y el plano $z = 0$

Solución Problema 1

Notemos que la curva C se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t)\,, 1 + sen(t), 2 + 2sen(t))\ t \in [0,2\pi]$$

Luego, para poder estudiar la curvatura de C, recordemos la fórmula que da origen a su estudio, para que, con la parametrización realizada podamos determinar lo pedido.

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) x \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Determinando cada uno de los elementos necesarios para su estudio se tiene:

$$\vec{r}'(t) = (-\text{sen}(t)\,, cos(t), 2cos(t))$$
$$\vec{r}''(t) = (-\cos(t)\,, -sen(t), -2sen(t)) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}'(t) x \vec{r}''(t) = (0,-2,1)$$

0.5 ptos

Por ende, reemplazando en la fórmula de cuadratura obtenemos:

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) x \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\|(0,-2,1)\|}{\|(-\text{sen}(t)\,, cos(t), 2cos(t))\ \|^3} = \frac{\sqrt{5}}{(1 + 4cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Los valores máximos de la curvatura se producen cuando la función del denominador decrece, por ende, notemos que como el coseno ubicado está al cuadrado, y sus valores oscilan entre -1 y 1, el menor valor de la curvatura de produce cuando el coseno cuadrado es 0.

$$cos^2(t) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Evaluando la curva en estos puntos

$$P_1 = (0,2,4) \; y \; P_2 = (0,0,0)$$

Tenemos que la curvatura es máxima con un valor de

$$k(P_1) = k(P_2) = \sqrt{5}$$

En la siguiente situación, minimizando la curvatura tenemos que el coseno cuadrado debe ser uno.

$$cos^2(t) = 1 \Rightarrow t_3 = 0, t_4 = \pi, t_5 = 2\pi$$

Evaluando en estos puntos tenemos lo siguiente:

$$P_3 = (1,1,2) \; y \; P_4 = (-1,1,2), P_5 = (1,1,2)$$

Resultando

$$k(P_3) = k(P_4) = k(P_5) = \frac{1}{5}$$

1 pto

Ahora bien, para calcular el volumen consideremos el siguiente desarrollo de la integral doble

$$V = \iint_D x^2 + y^2 \, dxdy; \quad D: x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2sen\theta} r^3 dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} 16 sen^4\theta d\theta = \int_0^{\pi} 4(1 - \cos(2\theta))^2)^2 d\theta =$$

$$4\left[\frac{3\theta}{8} - \frac{sen2\theta}{4} + \frac{sen4\theta}{32}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

0.5 ptos

Problema 2

Determinar la distancia mínima desde el origen al plano $ax + by + cz + d = 0$, donde a, b, c y d son constantes.

Solución Problema 2

La distancia del origen a un punto (x,y,z) es $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ahora bien, para facilitar cálculos, minimicemos la función:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z)$$

Utilicemos el método de los multiplicadores de Lagrange, tomando en cuenta que tenemos como restricción a dicha distancia el plano mencionado en el enunciado.

$$L(x, y, z, \boldsymbol{\lambda}) = x^2 + y^2 + z^2 + (ax + by + cz + d)\boldsymbol{\lambda}$$

Tenemos derivando:

$L_x = 2x + a\boldsymbol{\lambda} = 0$

$L_y = 2y + b\boldsymbol{\lambda} = 0$

$L_z = 2z + c\boldsymbol{\lambda} = 0$

$L_{\boldsymbol{\lambda}} = ax + by + cz + d = 0$

Por comparación

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Rightarrow x = \frac{az}{c}, y = \frac{bz}{c}$$

Reemplazando en la restricción $ax + by + cz + d = 0$

$$\frac{a^2 z}{c} + \frac{b^2 z}{c} + cz + d = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-ad}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y_0 = \dfrac{-bd}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z_0 = \dfrac{-cd}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

Luego $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto crítico que cumple la condición.

1 pto

Para decidir extremo en el punto se calcula determinante $H(P_0)$ y $f_{xx}(P_0)$

De f y la condición se tiene:

$$f_x = 2x + 2zz_x;\ \ z_x = \frac{-a}{c} \Rightarrow f_x = 2(x - z\frac{a}{c}) \Rightarrow f_{xx} = 2(1 + \frac{a}{c^2}^2)$$

$$f_{xy} = -2\frac{a}{c}z_y = -2\frac{a}{c}\frac{-b}{c} = 2\frac{ab}{c^2}$$

$$f_{yy} = 2(1 + \frac{b}{c^2}^2)$$

Luego

$H(x,y)\begin{bmatrix} 2\left(1+\frac{a}{c^2}^2\right) & 2\frac{ab}{c^2} \\ 2\frac{ab}{c^2} & 2\left(1+\frac{b}{c^2}^2\right) \end{bmatrix} > 0\ con\ f_{xx} > 0\ \forall\ P = (x,y,z)$, en particular en el punto crítico P_o

Con lo anterior tenemos que la distancia mínima es

$$\delta = \frac{\sqrt{(da)^2 + (db)^2 + (dc)^2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|d|\sqrt{(a)^2 + (b)^2 + (c)^2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1pto

Problema 3.

Resolver la integral:

$$I = \int_C \frac{xdx + 2ydy + 3zdz}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

Si la curva está dada por:

a) $\vec{r}(t) = (\mathrm{t}, t^2, t^3)\ t \epsilon [0,1]$

b) $x^2 + y^2 = a^2$, $\qquad x^2 + y^2 = z^2 \quad z > 0$

Solución Problema 3

Para el campo vectorial $\vec{F} = \big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) \in \mathbb{R}^3$ de clase C^1, se verifica para las componentes f, g y h

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2};\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{-12yz}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-6xz}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2};$$

Con lo cual $\vec{F}$ es campo gradiente con potencial

$$\emptyset(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln\,(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

1.2 pto

Con esto, para el primer caso

$$I = \emptyset(1,1,1) - \emptyset(0,0,0) = \frac{1}{2}\ln 7$$

Y para el segundo

$$I = 0$$

Por ser C una curva cerrada

0.8 pto

Solución Alternativa

Parametrizando se tiene:

$\vec{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

Luego, en a)

$$\int_0^1 \frac{t + 2t^2 2t + 3t^3 3t^2}{1 + t^2 + 2t^4 + 3t^6}dt = \int_0^1 \frac{t + 4t^3 + 9t^5}{1 + t^2 + 2t^4 + 3t^6}dt = \frac{1}{2}\ln\,(1 + t^2 + 2t^4 + 3t^6)_0^1$$

$$= \frac{\ln 7}{2}$$

1 pto

En b)

$\vec{r}\ \ (t) = (\mathrm{acos}\ (\mathrm{t}), asen(t), \mathrm{a}) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}'(t) = (-\mathrm{asen}\ (\mathrm{t}), acos(t), 0)$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{acos}(t)\left(-asen(t)\right) + 2asent(t)(\mathrm{a}\cos(t))}{1 + \mathrm{a}^2\cos^2(t) \quad + 2\mathrm{a}^2\mathrm{sen}^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{a}^2\mathrm{sen}(\mathrm{t})\cos(\mathrm{t})}{2 + \mathrm{a}^2\mathrm{sen}^2(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(2 + \mathrm{a}^2\,\mathrm{sen}^2(t)\right)_0^{2\pi} = 0$$

1 pto