UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2012

(21/12/2012)

Pregunta 1:

Utilice una integral curvilínea (deducida del teorema de Green), para calcular el área encerrada por la curva (llamada lágrima):

$$\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \left(\mathbf{2}\,\boldsymbol{a}\mathbf{cos}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{asen}(\mathbf{2}\boldsymbol{t}), \boldsymbol{bsen}(\boldsymbol{t})\right), \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} \leq \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$$

Donde a y b son constantes reales positivas.

Solución:

Con fórmula $A(D) = \oint_c xdy$, (que se deduce del teorema de Green con $f(x,y) = 0,\ g(x,y) = x$ y así $\oint_c xdy = \iint_c \frac{\partial x}{\partial x} dxdy = \iint dxdy = A(D)$), aplicada a curva C dada por:

0,5 pts.

$$\vec{r}(t) = \left(2\,a\cos(t) - asen(2t), bsen(t)\right)$$
$$\Rightarrow \vec{r}'(t) = \left(-2asen(t) - 2\,a\cos(2t)\,, bcos(t)\right)$$

Entonces,

$$A(D) = \int_c xdy = \int_0^{2\pi} (\,2\,a\cos(t) - asen(2t))bcos(t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (2\,a\cos(t)\ \ bcos(t) - \ asen(2t)\ bcos(t))dt$$

1,0 pts.

$$= 2ab\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt - \int_0^{2\pi} sen(t)\cos{(t)}^2 dt\right]$$
$$= 2ab\left(\frac{t}{2} + \frac{sen(2t)}{4}\right)|_0^{2\pi} + 2ab\frac{cos(t)^3}{3}|_0^{2\pi}$$
$$= 2ab\ \frac{2\pi}{2} + 0$$
$$= 2\pi ab$$

0,5 pts.

Nota: También se puede usar la fórmula $A(D) = -\oint_c ydx$, o bien $A(D) = \frac{1}{2}\int (xdy - ydx)$

Pregunta 2:

a) Determine si el campo $\vec{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{e^x}\cos(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{yz}, \boldsymbol{xz} - \boldsymbol{e^x sen(y)}, \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{z})$, es un campo gradiente o no.

b) Evaluar la integral $\boldsymbol{I} = \int_c (\boldsymbol{e^x}\cos(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{yz})\boldsymbol{dx} + (\boldsymbol{xz} - \boldsymbol{e^x sen(y)})\boldsymbol{dy} + (\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}$ a lo largo de la curva C, $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\cos(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{sen(t)}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{con\ t\ \epsilon}\ [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2\pi}]$.

Solución:

El campo vectorial $\vec{F} = (e^x\cos(y) + yz,\ xz - e^x sen(y),\ xy + z)$ tiene por componente
$f(x,y,z) = e^x\cos(y) + yz, \qquad g(x,y,z) = xz - e^x sen(y), \qquad h(x,y,z) = xy + z$
de clase $C^{(1)}$ que verifican:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x sen(y) + z = \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = x = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = y = \frac{\partial f}{\partial z}$$

De manera equivalente tiene $\nabla x\vec{F} = (0,0,0)$.

Entonces $\vec{F}$ es campo gradiente; existe $\Phi(x,y,z)$ con $\nabla\Phi = \vec{F}$.

0,8 pts.

El potencial Φ se obtiene del sistema:

$$\Phi_x = f = e^x\cos(y) + yz$$
$$\Phi_y = g = xz - e^x sen(y)$$
$$\Phi_z = h = xy + z$$

Que integrando Φ_x da

$$\Phi(x,y,z) = e^x\cos(y) + xyz + C(y,z)$$
$$\Rightarrow\ \Phi_y = -e^x sen(y) + xz + \frac{\partial C}{\partial y} = xz - e^x sen(y)$$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial C}{\partial y} = 0\ \Rightarrow C = C^*(z)$$
$$\Rightarrow\ \Phi(x,y,z) = e^x\cos(y) + xyz + C^*(z)$$
$$\Rightarrow\ \Phi_z = xy + \frac{dC^*}{dz} = xy + z$$
$$\Rightarrow\ \frac{dC^*}{dz} = z$$
$$\Rightarrow\ C^*(z) = \frac{z^2}{2}$$

Así el potencial es

$$\Phi(x,y,z) = e^x\cos(y) + xyz + \frac{z^2}{2}$$

0,8 pts.

La integral es independiente de C que une $A = \vec{r}(0) = (1,0,0)$ con $B = \vec{r}(2\pi) = (1,0,2\pi)$ y su valor es

$$\mathbb{I} = \Phi(1,0,2\pi) - \Phi(1,0,0) = e + \frac{4\pi^2}{2} - e = 2\pi^2$$

0,4 pts.

<u>Pregunta 3:</u>

Calcule el flujo del campo $\vec{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ a través de la superficie del sólido acotado por el cilindro $\boldsymbol{z} = \mathbf{4} - \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$ y los planos $\boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x} = \mathbf{1},\ \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$.

Solución:

Como $\vec{F}$ es campo vectorial de clase $C^{(1)}$ definido en región R cerrada por superficies planas $x = 0,\ x = 1,\ z = 0$ y superficie cilíndrica parabólica $z = 4 - y^2$, entonces rige el teorema de Gauss.

0,5 pts.

La integral de superficie:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_R \nabla \cdot (x, y, z)\, dV &= \iiint_R 3dV \\ &= 3\int_0^1 \left(\int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-y^2} dz\right) dy\right) dx \\ &= 3\int_0^1 \left(\int_{-2}^2 z\big|_0^{4-y^2} dy\right) dx \\ &= 3\int_0^1 \left(\int_{-2}^2 4 - y^2\, dy\right) dx\end{aligned}$$

1,0 pts.

$$\begin{aligned}&= 3\int_0^1 \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)_{-2}^{2} dx \\ &= 3\int_0^1 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) dx \\ &= 3 \cdot \frac{3^2}{3} \\ &= 32\end{aligned}$$

0,5 pts.