UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2012
(16/11/2012)

<u>Pregunta 1:</u>

Sea $\boldsymbol{f(x,y,z) = z(x-y)^5 + xy^2z^3}$

a) Calcular la derivada direccional de f en el punto $P_0 = (2,1,-1)$ en la dirección de la norma unitaria exterior a la esfera $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 6}$.
b) ¿En qué dirección la derivada direccional de f en $P_0 = (2,1,-1)$ es máxima? ¿Cuál es este valor máximo?
c) Asumiendo que $\boldsymbol{f(x,y,z) = z(x-y)^5 + xy^2z^3 - 1 = 0}$ define z como $z = z(x,y)$ en una vecindad del punto $P = (1,1,1)$. Calcular $\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$ $\boldsymbol{en\ V(1,1,1)}$.

Solución:

a) Como f es función polinomial en x, y, z entonces es diferenciable; aplicando fórmula $D_u f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \hat{u}$; Se obtiene:

$$D_u f(2,1,-1) = \nabla f(2,1,-1) \cdot \hat{u}$$

Donde - $\hat{u}$ es:

$$\hat{u} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(2,1,-1)} = \frac{(4,2,-2)}{2\sqrt{6}} = \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}}$$

- $\nabla f(x,y,z)$ es:

$$\nabla f(x,y,z) = (5z(x-y)^4 + y^2z^3, -5z(x-y)^4 + 2xyz^3, (x-y)^5 + 3xy^2z^2)$$

⇨ $\nabla f(2,1,-1) = (-6,1,7)$

De esto

$$D_u f(2,1,-1) = (-6,1,7) \cdot \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}} = -3\sqrt{6}$$

0.7 pts.

b) $D_u f(p_0)$ es máximo si la dirección de $\hat{u}$ es la del $\nabla f(p_0)$, esto es,

$$\hat{u} = \frac{\nabla f(p_0)}{\|\nabla f(p_0)\|} = \frac{(-6,1,7)}{\sqrt{86}}$$

Es valor de este máximo es $\|\nabla f(p_0)\| = \sqrt{86}$

0.6 pts.

c) De $F(x,y,z) = z(x-y)^5 + xy^2z^3 - 1$

⇨ $F_x = 5z(x-y)^4 + y^2z^3$ y $F_z = (x-y)^5 + 3xy^2z^2$

⇨ $Z_x = -\frac{5Z(x-y)^4+y^2Z^3}{(x-y)^5+3xy^2z^2}$ en $V_{(1,1,1)}$

⇨ $Z_x(p_0) = -\frac{1}{3}$;

⇨ $Z_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5Z(x-y)^4+y^2Z^3}{(x-y)^5+3xy^2z^2}\right)$

0.7 pts.

Pregunta 2:

Obtener los puntos de la superficie: $\boldsymbol{z = xy}$ en los cuales el plano tangente a la superficie dada sea perpendicular al plano de ecuación $\boldsymbol{x + y - cz = 0}$ con c constante, $\boldsymbol{c \neq 0}$.

Solución:

Se tiene $\boldsymbol{\nabla F = (-y, -x, 1)}$ y el vector $\boldsymbol{\vec{n} = (1, 1, -c)}$ es normal al plano $\boldsymbol{x + y - cz = 0}$. Se debe verificar perpendicularidad entre $\boldsymbol{\vec{n}}$ y $\boldsymbol{\nabla F}$, esto es: $\boldsymbol{\vec{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla F} = (1,1,-c) \cdot (-y, -x, -1) = 0$. Además, los puntos deben estar en la superficie dada, o sea, verifican $\boldsymbol{z = xy}$. Así las soluciones son los puntos (x, y, z) que verifican el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} (1,1,-c) \cdot (-y, -x, -1) = 0 \\ -xy + z = 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -y - x - c = 0 \\ -xy + z = 0 \end{array}\right]$$

1,5 pts.

$$\Rightarrow \quad y = x - c \quad \Rightarrow \quad x(-x - c) + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -x^2 - cx$$

Y $S = \{(x, -x - c, -x^2 - cx) \mid x \in R, c\ parámetro\}$, el cual es curva en R^3 (conjunto de puntos que cumplen lo requerido).

0,5 pts.

Por ejemplo, en particular:

Si $c = 1$, el plano dado es $x + y - z = 0$; el plano tangente en $\vec{r}_{(1)} = (2, -3, -6)$ tiene ecuación:

$$\begin{array}{c} \nabla f(2, -3, -6) \cdot (x - 2, y + 3, z + 6) = 0 \\ \Rightarrow (3, -2, 1) \cdot (x - 2, y + 3, z + 6) = 0 \\ \Rightarrow 3(x - 2) - 2(y + 3) + (z + 6) = 0 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{array}$$

Y su $\nabla F = (3, -2, 1)$ con $\vec{n} = (1, 1, -1)$ de plano $x + y - z = 0$ verifica:

$$\begin{aligned} \nabla F \cdot \vec{n} &= 0 \\ (3, -2, 1) \cdot (1, 1, -1) &= 0 \\ 3 - 2 - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

O sea $\nabla F \perp \vec{n}$ y el plano tangente en $(2, -3, -6)$ es perpendicular al plano $x + y - z = 0$.

Pregunta 3:

a) Hallar los puntos críticos de la función $\boldsymbol{f(x,y,z)=x^2+yz}$ en el dominio
$\boldsymbol{D=\{(x,y,z)\epsilon\, R^3/\, x^2+y^2+z^2\leq 1\}.}$

b) Entre los puntos críticos calculados, determine cuales corresponden a valores máximo de f y cuáles a mínimo de f, considerando los puntos críticos situados en el eje X y los puntos críticos ubicados en el plano YZ que tengan componentes con signos distintos.

Solución:

a)

a1) $\nabla f=(2x,z,y)=(0{,}0{,}0)$ determina al punto crítico $\boldsymbol{P_1=(0,0,0).}$

0,2 pts.

a2) Para f con condición $g=0$, usando función de Lagrange:

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} F_x&=2x+2\lambda x=0\\ F_y&=z+2\lambda y=0\\ F_z&=y+2\lambda z=0\\ F_\lambda&=x^2+y^2+z^2-1=0\end{aligned}\right|$$

Entonces, $(2+2\,\lambda)x=0 \quad \Rightarrow\ x=0\ \text{ ó }\ \lambda_1=-1$
$(y+2)(1+2\lambda)=0 \ \Rightarrow\ z=-y\ \text{ ó }\ \lambda_2=-1/2$

De aquí, $2z^2=1 \quad\Rightarrow\quad z=\pm 1/\sqrt{2}$

Entonces encontramos los puntos críticos: $\boldsymbol{P_3=\left(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)}$
$\boldsymbol{P_4=(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}$

Si $\lambda_1=-1\Rightarrow\quad z=2y, y=-2z$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}2y-z&=0\\ y+2z&=0\end{aligned}\right|$$

$$\Rightarrow\ y=0,z=0\ \Rightarrow\ x^2=1\ \Rightarrow\ x=\pm 1$$

Luego tendremos los puntos críticos: $\boldsymbol{P_6=(1,0,0)}$
$\boldsymbol{P_7=(-1,0,0)}$

Si $\lambda_2 = -1/2 \Rightarrow \quad z = y,\ x = 0$

De aquí, $\quad 2y^2 = 1 \ \Rightarrow \ y = \pm 1/\sqrt{2} = z$

Entonces encontramos los puntos críticos: $\boldsymbol{P_2} = (\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}})$

$\boldsymbol{P_5} = (\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}})$

1,0 pts.

b) Calculando Hessiano restringido H_F para puntos críticos P_6, P_7 y P_3, P_4 se tiene:

$$H_F = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ g_z & F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & (2+2x) & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda & 1 \\ 2z & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ H_F = (4 - 16\lambda^2)x^2 + 16(1+\lambda)(yz - 2\lambda y^2);\ A_3 = -8(\lambda x^2 + (1+\lambda)y^2)$$

Resultan signos:

$H_F(P_6) = H_F(P_7) = -12 < 0\,, A_3(P_6) = A_3(P_7) = 8 > 0$
Y $\boldsymbol{f(P_6) = f(P_7) = 1}$ **es valor máximo.**

$H_F(P_3) = H_F(P_4) = 4 > 0\,, A_3(P_3) = A_3(P_4) = -2 < 0$
Y $\boldsymbol{f(P_3) = f(P_4) = -1/2}$ **es valor mínimo.**

En $P_1 = (0,0)$ en cada $V(P_1)\, f > 0$ ó $f < 0$ no existe extremo alternativamente, para decidir extremo de P_i perteneciente a la frontera de D se puede usar teorema de conjunto cerrado.

0,8 pts.