UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2009
(11/12/09)

Problema 1.

Calcular el volumen del subconjunto $D \subset \Re^3$ **limitado por las superficies** $z = 0$, $z = 4 - (x^2 + y^2)$, $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$.

Solución:

1) Por diferencia de volumen: En coordenadas polares.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \Rightarrow |J| = \rho$$

Entonces:

$z = 4 - \rho^2$; $z = 0$ (en S1: $4 - (x^2 + y^2)$)

$$V_1 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - \rho^2)\rho \, d\theta \, d\rho$$
$$= 2\pi\left[4\int_0^2 \rho \, d\rho - \int_0^2 \rho^3 d\rho\right] = 2\pi[8 - 4] = 8\pi$$

0.9 puntos

$z = 4(1 - \rho^2)$; $z = 0$ (en S2: $4 - 4(x^2 + y^2)$)

$$V_2 = 4\int_0^1\int_0^{2\pi}(1 - \rho^2)\rho \, d\theta \, d\rho = 8\pi\left[\int_0^1 \rho \, d\rho - \int_0^1 \rho^3 d\rho\right] = 8\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = 2\pi$$

0.9 puntos

Luego el volumen pedido es:

$$\boxed{V = V_1 - V_2 = 8\pi - 2\pi = 6\pi}$$

0.2 puntos

2) <u>Por integral doble:</u>

$z = 4-(x^2+y^2)$, con $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$

$z = 4-4(x^2+y^2)$, con $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$

Luego el volumen:

$$V = 4\iint_{D1} 4-(x^2+y^2)dxdy + 4\iint_{D2}\left[4-(x^2+y^2)-(4-4(x^2+y^2)\right]dxdy$$

1 punto

$$=16\iint_{D1} dxdy - 4\iint_{D1}(x^2+y^2)dxdy + 4\iint_{D2} 3(x^2+y^2)dxdy$$

$$=16\iint_{D1} dxdy - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2 r^3 dr\right)d\varphi + 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^3 dr\right)d\varphi = 12\pi - \frac{15\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\boxed{V = 6\pi}$$

1 punto

3) <u>Por integral triple:</u> en coordenadas cilíndricas.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow |J| = \rho$$

S1: $z = 4-\rho^2$; $z=0$ Entonces:

$\rho = \sqrt{4-z}$

en S2: $z = 4-4\rho^2$; $z=0$

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{4-z}$

Así:

$$R = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \Re^3 \,/\, \frac{1}{2}\sqrt{4-z} \le \rho \le \sqrt{4-z};\quad 0 \le \theta \le 2\pi;\quad 0 \le z \le 4 \right\}$$

$$\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

1 punto

$$\frac{1}{2}\int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[(4-z) - \frac{1}{4}(4-z) \right] d\theta\, dz = \frac{3\pi}{4}\int_0^4 (4-z)\, dz = 6\pi$$

1 punto

Problema 2.

Sea $\vec{F}(x,y,z)=(3x^2yz-3y,\ \ x^3z-3x,\ \ x^3y+2z)$. **Evaluar** $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ **, si C es la curva que une los puntos A=(0,0,2) y B=(0,3,0) que ilustra la figura adjunta.**

Solución:

El campo $\vec{F}(x,y,z)=(3x^2yz-3y,\ \ x^3z-3x,\ \ x^3y+2z)=(f,g,h)$ es de clase $C^{(1)}$ y conservativo ya que verifica.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2z-3=\frac{\partial g}{\partial x};\ \frac{\partial g}{\partial z}=x^3=\frac{\partial h}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial h}{\partial x}=3x^2y=\frac{\partial f}{\partial z}.\ \left(ó\ \ \nabla\times\vec{F}=\vec{0}\right)$$

1 punto

Existe potencial ϕ, que cumple:

$$\left.\begin{aligned}\phi_x&=3x^2yz-3y\\ \phi_y&=x^3z-3x\\ \phi_z&=x^3y+2z\end{aligned}\right\}\Rightarrow \phi(x,y,z)=x^3yz-3xy+z^2$$

0,5 puntos

Así:

$$\boxed{\int_C \vec{F}\,d\vec{r}=\phi(0,3,0)-\phi(0,0,2)=0-4=-4}$$

0,5 puntos

O bien parametrizando $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ con:

C_1:

$$\vec{r}_1(t)=(0,0,2-2t),\quad t\in[0,1]\Rightarrow \vec{r}_1\,'(t)=(0,0,-2)\Rightarrow$$

$$\int_{C1}\vec{F}\,d\vec{r}=2\int_0^1(2-2t)(-2)dt=-4$$

0,4 puntos

C_2:

$$\vec{r}_2(t)=(t,t,0),\quad t\in[0,1]\Rightarrow \vec{r}_2\,'(t)=(1,1,0)\Rightarrow$$

$$\int_{C2}\vec{F}\,d\vec{r}=\int_0^1(-3t,-3t,t^4)(1,1,0)dt=-3$$

0,4 puntos

C_3:

$$\vec{r}_3(t) = (1,1,0) + t[(3,0,0) - (1,1,0)] = (1+2t, 1-t, 0) \quad t \in [0,1] \Rightarrow \vec{r}_3\,'(t) = (2,-1,0) \Rightarrow$$

$$\int_{C3} \vec{F}\,\vec{dr} = \int_0^1 (-3(1-t), -3(1+2t), (1+2t)(1-t))(2,-1,0)dt = 3$$

0,4 puntos

C_4:

$$\vec{r}_4(t) = (3\cos t, 3sent, 0) \quad t \in [0, \pi/2] \Rightarrow \vec{r}_3\,'(t) = (-3sent, 3\cos t, 0) \Rightarrow$$

$$\int_{C4} \vec{F}\,\vec{dr} = \int_0^1 (-9sent, -9\cos t, 27\cos^3 t \cdot 3sent)(-3sent, 3\cos t, 0)dt = 0$$

0,4 puntos

De esta forma:

$$\boxed{\int_C \vec{F}\,\vec{dr} = -4}$$

Problema 3.

Resolver la integral de flujo $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\cdot ds$**, para el campo vectorial** $\vec{F}(x,y,z)=(-y,x,2z)$ **y la superficie** $S: x^2+y^2+z^2=25$ **con** $\hat{n}$ **normal unitaria exterior a S.**

a) **Directamente.**
b) **Usando el teorema de Gauss.**

Solución:

a) Para calcular la integral doble debemos primero parametrizar la superficie, para los cual usamos coordenadas esféricas:

Esfera: $r(\phi,\theta)=(5sen\phi\cos\theta,\ \ 5sen\phi sen\theta,\ \ 5\cos\phi)\Rightarrow$

$$r_\phi(\phi,\theta)=(5\cos\phi\cos\theta,\ \ 5\cos\phi sen\theta,\ \ -5sen\phi),\ \ 0\le\phi\le\pi$$
$$r_\theta(\phi,\theta)=(-5sen\phi sen\theta,\ \ 5sen\phi\cos\theta,\ \ 0),\ \ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$r_\phi\times r_\theta=(25sen^2\phi\cos\theta,\ \ 25sen^2\phi sen\theta,\ \ 25sen\phi\cos\phi)$$

0.8 puntos

Luego:

$$\iint_S \vec{F}(r(\phi,\theta))(r_\phi\times r_\theta)dA$$

De donde:

$\vec{F}(r(\phi,\theta))=(-5sen\phi sen\theta,\ \ 5sen\phi\cos\theta,\ \ 10\cos\phi)$ y

0.7 puntos

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}250sen\phi\cos^2\phi d\phi d\theta=\frac{1000\pi}{3}}$$

b) Se tiene por teorema de la divergencia que:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\cdot ds=\iiint_E divFdv$$

Luego E esfera y $divF = 2$, de donde:

$$\boxed{\iiint_E divF dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{1000\pi}{3}}$$

0.5 puntos