UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2009
(03/07/2009)

Problema 1. Resolver $I=\iint_D e^{\frac{x-2y}{x+2y}}dxdy$, **en que D es el triangulo de vértices A=(0,0) B=(2,0) y C=(0,1)**

Indicación: Utilice el cambio de variables u = x-2y; v = x+2y

Solución:

Con el cambio de variables indicado se tiene de:

$$u=x-2y$$
$$v=x+2y,\quad \frac{u+v}{2}=x,\quad \frac{v-u}{4}=y$$

Así $x=0\rightarrow u=-v,\quad y=0\rightarrow v=u,\quad x+2y=2\rightarrow v=2$, con lo cual el dominio D' en (u,v) es $D^{'}:\quad 0\le v\le 2,\quad -v\le u\le v$

El Jacobiano es:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$$

Entonces $I=\iint_{D^{'}}\frac{1}{4}e^{\frac{u}{v}}dudv=\frac{1}{4}\int_{O}^{2}(\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}du)dv=\frac{1}{4}\int_{O}^{2}[ve^{\frac{u}{v}}]_{-v}^{v}dv$

$$=\frac{1}{4}\int_{O}^{2}v(e-e^{-1})dv=\frac{1}{4}\frac{v^2}{2}\int_{O}^{2}(e-e^{-1})=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$$

$$\boxed{\therefore I=\iint_D e^{\frac{x-2y}{x+2y}}dxdy=\frac{1}{2}(e-e^{-1})}$$

<u>Problema 2</u>. Sea M(x,y)= $5x^4y+x^2y^3$

a) **Obtener N(x,y) tal que F(x,y)= (M(x,y), N(x,y)) sea un campo conservativo, es decir, un campo gradiente.**
b) **Utilice el resultado anterior para calcular** $\oint_C M(x,y)dx$ **si C es una circunferencia centrada en (o,o) de radio 2.**

<u>Solución:</u>

$M(x,y)=5x^4y+x^2y$ que es de clase $C^{(1)}$ en R^2 , para que $\vec{F}=(M(x,y),N(x,y))$ sea campo gradiente, N(x,y) debe ser de clase $C^{(1)}$ y verificar $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ este es,

$\frac{\partial M}{\partial y}=5x^4+3x^2+y^2=\frac{\partial N}{\partial x}$; integrando resulta:

N(x,y)= $\int(5x^4+3x^2y^2)\ dx=x^5+x^3y^2$ y el campo es $\vec{F}=(5x^4y+x^2y^3,x^5+x^3y^2)$

De esto, b) cada $I=\oint_C Mdx+Ndy=0$ si C es curva regular cerrada; en particular si C es $x^2+y^2=4$, I= 0, Así con $\vec{r}(t)=(2\cos t,2sent)\ \ t\in[0,2\pi],\vec{r}(t)=(-2sent,2\cos t)$ determina

$$\oint_\Theta M(x,y)dx\equiv\oint_\Theta(5x^4y+x^2y^3)dx=-\oint_\Theta Ndy=-\oint_\Theta(x^5+x^3y^2)dy=$$

$$=-\int_O^{2\pi}(2^5\cos^5t+2^3(\cos^3t)2^2sen^2t)2\cos tdt$$

$$\int_O^{2\pi}(2^6\cos^6t+2^6\cos^4tsen^2t)dt\ =\ -2^6\int_O^{2\pi}\cos^4t(\cos^2t+sen^2t)dt=-2^6\int_O^{2\pi}(\cos^2t)^2dt$$

$$=-2^6\int_O^{2\pi}(\frac{1+\cos 2t}{2})^2dt=\frac{-2^6}{2^2}\int_\Theta^{2\pi}1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt$$

$$=-2^4(2\pi+0)-2^4\int_O^{2\pi}(\frac{1\cos 4t}{2})dt=-2^4(2\pi+\frac{2\pi}{2})=-2^4\frac{6\pi}{2}$$

$$=-2^36\pi=-48\pi$$

<u>Problema 3.</u> Dada la superficie esférica $x^3 + y^2 + z^2 = a^2$ y la cilíndrica

$x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$

a) **Calcular la superficie esférica superior interior al cilindro.**
b) **Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial F= (2x,-5z,5y) si S es la superficie descrita en a).**

<u>Solución:</u>

Las superficies en su intersección verifican que:

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \;\; x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow z^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow z = \dfrac{a}{\sqrt{2}} > 0$ y se tiene circunferencia C:

$x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}, z = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ que limita la superficie S de la esfera interior al cilindro

a) Con parametrización para S: $\vec{r}(u,v) = (a\cos v senu, asenvsenu, a\cos u)$ D:

$0 \le v \le 2\pi, \;\; 0 \le u \le \dfrac{\pi}{4},$,entonces $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = a^2(\cos vsen^2u, senvsen^2u, senu\cos u)$

(vector normal apunta hacia fuera de S). Así $A(S) = \iint_D \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| dudv$ y calculando

$\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| = a^2 senu$ de donde:

$$\text{A(S)}= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 senvdv \right) du = 2\pi(-\cos v)_O^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \equiv \pi a^2 (2 - \sqrt{2})$$

También puede ser resuelta con coordenadas cartesianas y fórmula

A(S)= $\iint_D \sqrt{1 + Zx^2 + Zy^2}\, dxdy$ con $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, D: $x^2 + y^2 \le \dfrac{a^2}{2}, z = 0$

b) $\vec{F} = (2x, -5z, 5y)$ es de clase $C^{(1)}$; S es superficie simple parametrizada según parte a) orientada positivamente, según curva C: $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \dfrac{a}{\sqrt{2}} sent, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right), t \in [0, 2\pi],$ es curva regular simple y se obtienen:

$$I_1 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_O^{2\pi} \left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\cos t, -5\frac{a}{\sqrt{2}}, 5\frac{a}{\sqrt{2}} sent\right) \cdot \underbrace{\left(-\frac{a}{\sqrt{2}} sent, \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, o\right)}_{\vec{r}\,'(t)} dt$$

$$I_1 = a^2 \int_O^{2\pi} \left(-\cos t sent - \frac{5}{2}\cos t\right) dt = 0$$

$$I_2 = \iint_S \nabla x F \cdot \hat{n} ds = \iint_S (10,0,0) \cdot \hat{n}\, ds = 10a^2 \int_O^{2\pi} \left(\int_O^{\frac{\pi}{4}} (\cos vsen^2 u) du \right) dv = 0$$

De donde $I_1 = I_2$